Lernkontrolle Lagebeziehung Ebene und Ebene

DY-WO-NW

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Ebene

Bestimme die Schnittgerade der sich schneidenden Ebenen

a) E1: $1x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5$

E2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) E1: $-1x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 1$

E2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) E1: $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2$

E2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösungen:

DY-WO-NW

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Ebene

a) **3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:**

$1 \cdot (1 - 2r - 2s) - 2 \cdot (2 + 4r - 2s) + 2 \cdot (-2 + 6r - 2s) = -5$

$1 - 2r - 2s - 4 - 8r + 4s - 4 + 12r - 4s = -5$

$1 - 4 - 4 - 2r - 8r + 12r - 2s + 4s - 4s = -5$

$-7 + 2r - 2s = -5$

$2r - 2s = 2$

$r = 1 + 1s$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + (1 + 1s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

r in E2 einsetzen:
und nach "s" und "nicht s" trennen

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + 1s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) **3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:**

$-1 \cdot (0 - 2r + 2s) - 1 \cdot (-2 + 2r - 4s) + 2 \cdot (0 + 0{,}5r - 2s) = 1$

$0 + 2r - 2s + 2 - 2r + 4s + 0 + 1r - 4s = 1$

$0 + 2 + 0 + 2r - 2r + 1r - 2s + 4s - 4s = 1$

$2 + 1r - 2s = 1$

$1r - 2s = -1$

$r = -1 + 2s$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1 + 2s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

r in E2 einsetzen:
und nach "s" und "nicht s" trennen

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + 2s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) **3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:**

$1 \cdot (1 - 1r + 1s) + 1 \cdot (-2 + 1r + 2s) + 1 \cdot (1 - 1r - 2s) = 2$

$1 - 1r + 1s - 2 + 1r + 2s + 1 - 1r - 2s = 2$

$1 - 2 + 1 - 1r + 1r - 1r + 1s + 2s - 2s = 2$

$0 - 1r + 1s = 2$

$-1r + 1s = 2$

$r = -2 + 1s$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2 + 1s) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

r in E2 einsetzen:
und nach "s" und "nicht s" trennen

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$