

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Gerade

Bestimme die Lagebeziehung und gib ggf. den Schnittpunkt an.

a) E: $5 x_1 - 3 x_2 + 1 x_3 = 2$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) E: $-5 x_1 - 1 x_2 + 1 x_3 = -1$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

c) E: $-1 x_1 + 2 x_2 - 1 x_3 = -3$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) E: $2 x_1 - 1 x_2 + 1 x_3 = 0$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Gerade

a) g:
$$\begin{aligned} x_1 &= -3 - 2r \\ x_2 &= 0 - 2r \\ x_3 &= 15 + 2r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-3 - 2r) - 3 \cdot (0 - 2r) + 1 \cdot (15 + 2r) &= 2 \\ -15 - 10r + 0 + 6r + 15 + 2r &= 2 \\ 0 - 2r &= 2 && | -0 \\ -2r &= 2 && | : (-2) \\ r &= -1 \end{aligned}$$

Schnittpunkt bestimmen:

$$OS = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

=> S (-1|2|13)

b) g:
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 1r \\ x_2 &= -2 - 5r \\ x_3 &= 2 - 10r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -5 \cdot (1 - 1r) - 1 \cdot (-2 - 5r) + 1 \cdot (2 - 10r) &= -1 \\ -5 + 5r + 2 + 5r + 2 - 10r &= -1 \\ -1 + 0r &= -1 && | +1 \\ 0r &= 0 \end{aligned}$$

allgemeingültig => g liegt in E

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

c) g:
$$\begin{aligned} x_1 &= -3 - 5r \\ x_2 &= 0 - 1r \\ x_3 &= -1 + 3r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -1 \cdot (-3 - 5r) + 2 \cdot (0 - 1r) - 1 \cdot (-1 + 3r) &= -3 \\ 3 + 5r + 0 - 2r + 1 - 3r &= -3 \\ 4 + 0r &= -3 && | -4 \\ 0r &= -7 \end{aligned}$$

nicht lösbar => g parallel zu E

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

d) g:
$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - 3r \\ x_2 &= -3 - 3r \\ x_3 &= -2 + 7r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2 - 3r) - 1 \cdot (-3 - 3r) + 1 \cdot (-2 + 7r) &= 0 \\ -4 - 6r + 3 + 3r - 2 + 7r &= 0 \\ -3 + 4r &= 0 && | +3 \\ 4r &= 3 && | : 4 \\ r &= 0,75 \end{aligned}$$

Schnittpunkt bestimmen:

$$OS = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + 0,75 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,3 \\ -5,3 \\ 3,3 \end{pmatrix}$$

=> S (-4,25|-5,25|3,25)