Tim und Tom und die Mathematik Klasse 8

Hallo, ich bin Tom. Ich bin nicht gerade eine Leuchte in Mathematik. Aber das ist gar nicht so schlimm. Ich habe nämlich einen guten Kumpel, den Tim. Der erklärt mir immer alles ganz genau und ausführlich und dann macht es auch bei mir „Klick“. Und dann ist Mathematik auf einmal gar nicht mehr so kompliziert und kann sogar richtig Spaß machen.

Natürlich kann Tim jetzt nicht jedem Einzelnen von Euch helfen. Aber ich habe einfach mal unsere Gespräche aufgeschrieben, so dass ihr damit vielleicht Eure Fragen beantworten könnt. Viel Spaß dabei.

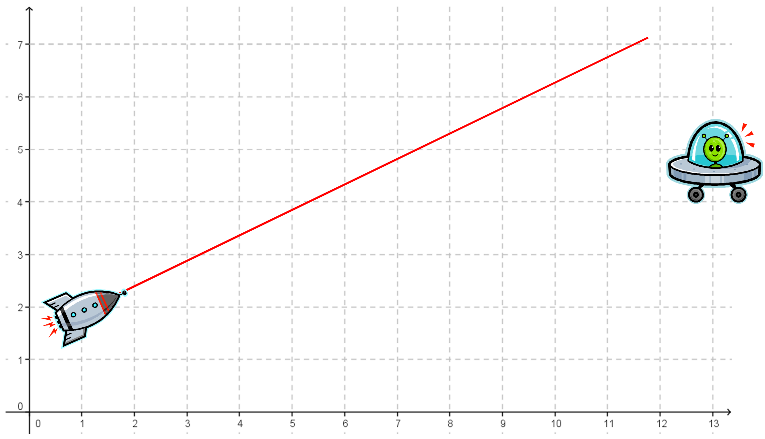
1. Lineare Gleichungen

1.1. Steigung einer linearen Funktion

Hallo Tim.

Hey, Tom! Was spielst du denn da am Handy?

Das ist ein kleines Spiel, bei dem man mit einem Laser Raumschiffe abschießen muss.



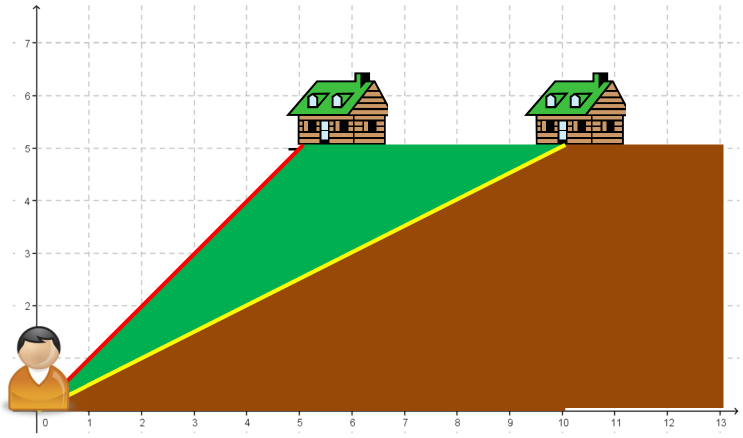
Der Schuss war aber nichts. Der ging ja voll daneben! Wie stellst du denn die Richtung des Lasers ein?

Ich muss in das Zahlenfeld den richtigen Wert eingeben. Ich habe es gerade mal mit 0,5 versucht, aber das war wohl zu viel. So ganz genau weiß ich noch nicht, was die Zahl bedeutet. Der Winkel zwischen Laser und der Waagrechten kann es jedenfalls schon mal nicht sein. Aber wenn das Raumschiff weit rechts und relativ weit unten ist, muss ich kleinere Zahlenwerte nehmen. Schwebt es links oben vorbei muss ich Zahlen größer als 1 nehmen. Mehr kann ich aber noch nicht sagen.

Dann habe ich eine Idee. Es wird sich wohl um die Steigung der Geraden handeln.

Und was muss ich mir da jetzt wieder darunter vorstellen?

Ganz einfach. Statt eines Winkels kann man auch die **Steigung** einer Gerade angeben, um zu festzulegen, wie steil diese verläuft. Stell dir vor die Gerade beschreibt den Wanderweg auf einen Berg. Schau dir zum Beispiel mal den folgenden Berg an mit den beiden Hütten an. Welchen der Wanderwege würdest du wählen?



Ich würde natürlich den gelben Weg zur rechten Hütte nehmen. Der andere ist ja viel zu steil. Das ist mir zu anstrengend. Wenn dann noch die Sonne brennt und der Rucksack so schwer ist und …

Stopp. Was in deinem Rucksack drin ist, ist mir an der Stelle mal egal. Betrachte mal wieder die beiden Wege. Wie kannst du jemandem beschreiben, welcher Weg der steilere ist, wenn du das Wort „steil“ nicht verwenden darfst?

Hä? Das weiß doch jeder was mit steil gemeint ist.

Klar, aber versuche es doch trotzdem mal. Wenn ein Mathematiker definieren muss, was beispielweise die Steigung einer Gerade ist, dann muss er auch eine Erklärung finden ohne den Begriff zu benutzen. Und sie sollte natürlich auch noch so sein, dass sie eindeutig ist und nicht falsch verstanden werden kann. Und wenn dann kein seitenlanger Roman rauskommt, sondern das Ganze auch noch kurz und bündig ist, dann hat er alles richtig gemacht.

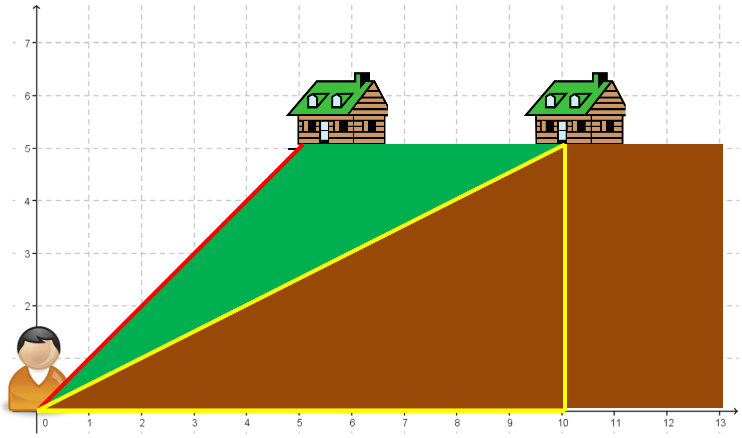
Ok. Dann versuche ich es mal. Ist gar nicht so einfach. Der rote Weg ist steiler, weil er höher geht.

Der rote Weg geht aber nicht höher. Die rechte Hütte liegt doch genau so hoch wie die linke.

Also gut. Der rote Weg ist steiler, weil man bei jedem einzelnen Schritt höher kommt als beim anderen Weg.

Prima. Das ist besser. Man könnte nämlich beispielsweise auch noch auf einem anderen Weg zur Hütte gelangen, aber abseits des Wanderweges. Dann würde man erst im Tal eine Weile auf gleicher Höhe nach rechts gehen bis man unterhalb der Hütte steht und anschließend senkrecht die Bergwand hochklettern. Natürlich wäre man blöd, wenn man diesen Weg nehmen würde, aber mathematisch ist es hilfreich diesen Weg zu betrachten.

Zeichnet man jetzt diesen Weg ein, entsteht mit dem Wanderweg zusammen ein Dreieck. Da wir dieses Dreieck benötigen, um die Steigung auszurechnen, nennen wir es sinnvollerweise **Steigungsdreieck**.



Da kann ich also die Höhenmeter pro waagrechter Wanderstrecke ablesen.

Sehr gut. Und was heißt dieses „pro“ mathematisch? Das kennst du ja auch von anderen Größen.

Klar. Von der Geschwindigkeit. Da habe ich Kilometer pro Stunde. Da heißt das „pro“ einfach „geteilt“. Ich muss also die Kilometer, die ich zurückgelegt habe durch die dafür benötigte Zeit teilen. Wenn ich das jetzt an unserer Gerade mache, muss ich also die Höhenmeter durch die waagrechte Wanderstrecke teilen. Und das was da dann raus kommt, ist dann die Steigung?

Genau. Das ist dann die Steigung.

Die Höhenmeter, die man zurückgelegt hat, lassen sich als **Unterschied** der y-Werte ablesen.

Nehmen wir ein Beispiel:
Wenn man zum Start der Wanderung auf 200 Höhenmeter war und anschließend bei 700 Höhenmeter an der Hütte ankommt, dann hat man 500 Höhenmeter hinter sich gebracht. Diesen Unterschied, auch wenn man es sofort sieht, berechnet man als **Differenz** der beiden Werte:
Höhenmeter am Ziel – Höhenmeter am Anfang = Höhenunterschied

Für den Höhenunterschied, also die Differenz der Höhen und somit die Differenz der y-Werte schreibt der Mathematiker jetzt ein Δy.

Statt einem D für Differenz nimmt der Mathematiker gerne mal einen entsprechenden griechischen Buchstaben: Hier das große Delta: Δ. Das sieht nicht nur cooler und gebildeter aus, es kann bei deutschen Buchstaben hier und da auch mal Verwechslungsgefahr bestehen.

Die Steigung bekommt jetzt auch noch einen eigenen Buchstaben – nämlich ein „m“.
Keine Ahnung, warum es gerade das in Mathebüchern ein „m“ geworden ist, aber das müssen wir so hinnehmen.

Jetzt kann man die Berechnung der Steigung Schritt für Schritt mathematischer schreiben:

Steigung = zurückgelegte Höhenmeter pro zurückgelegter waagrechter Strecke

Steigung m = $\frac{Unterschied\ Höhenmeter}{Unterschied\ Längenmeter}$

m = $\frac{Unterschied\ y-Werte}{Unterschied\ x-Werte}$

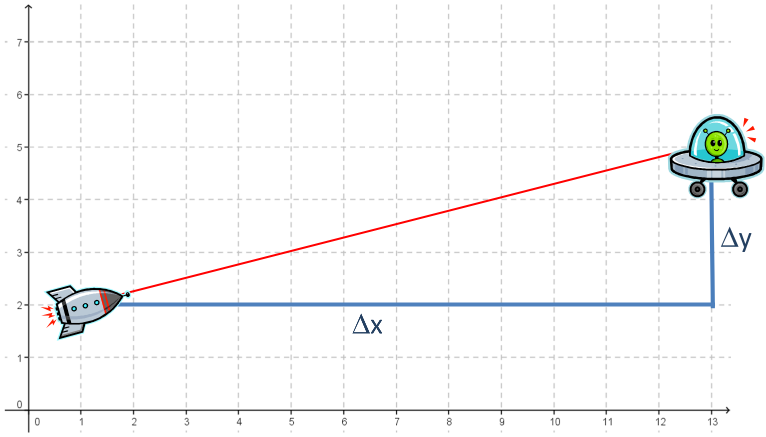
m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Wow. Das ist jetzt aber kurz. Das kann ich mir jetzt auch als roten Kasten ins Matheheft schreiben:

$$\boxed{\text{Steigung m} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

So, und jetzt probiere ich das an meinem Spiel aus. Bei den Differenzen nehme ich dann den y- bzw. x-Wert am Ziel minus den y- bzw. x-Wert am Start. Ich versuche das mal mathematisch:

Steigung m = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y\ am\ Ziel - y\ am\ Start}{x\ am\ Ziel - x\ am\ Start} = \frac{5-2}{13-1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ = 0,25



Klasse. Und wenn du jetzt den Start mit 1 nummerierst und das Ziel mit 2, dann kann man es noch ein wenig kürzer und kompakter schreiben:

Steigung m = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

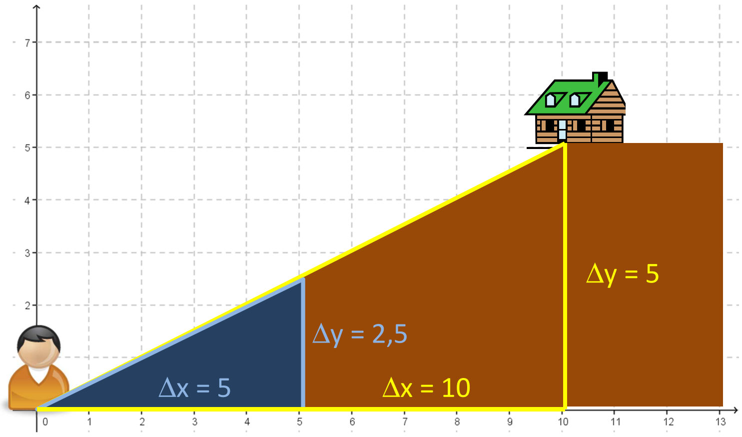
Und wenn ich mal im Koordinatenursprung loslaufen sollte, wird es total einfach. Dann ist x_1 und y_1 Null und ich kann sie weglassen und einfach $m = \frac{y_2}{x_2}$ hinschreiben.

Genau. Das wäre dann eine proportionale Funktion, also eine Gerade durch den Ursprung. Und für diese kannst du deine Formel natürlich auch anwenden.

Wie ist das eigentlich, wenn ich mein Steigungsdreieck nicht bis zur Hütte wähle, sondern kleiner mache? Es kann ja sein, dass ich mitten auf dem Wanderweg keine Lust mehr habe und dort einfach stehen bleibe. Dann müsste dieselbe Steigung rauskommen bei der Rechnung, da der Weg nicht flacher oder steiler ist.

Da kommt auch wirklich das gleiche raus.

Für das große Steigungsdreiecks gilt m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\frac{5}{10}$ = 0,5 und für das kleine m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\frac{2,5}{5}$ = 0,5



1.2. Funktionsgleichung

y = m x HIER WIRD NOCH WEITERGEARBEITET !