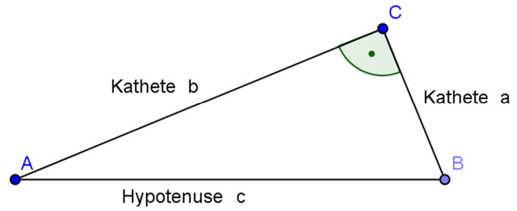
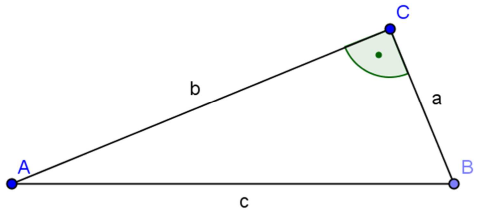
Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die längste Seite, die gleichzeitig dem rechten Winkel gegenüber liegt, **Hypotenuse**.
Die beiden Seiten, die am rechten Winkel anliegen, nennt man **Katheten**.
Im Folgenden seien a und b die Katheten und c die Hypotenuse.
Die Benennung kann natürlich auch anders lauten.



Satz des Pythagoras:
Das Dreieck ABC ist rechtwinklig
⇒ Es gilt: $a^2 + b^2 = c^2$



Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich in rechtwinkligen Dreiecken fehlende Dreiecksseiten berechnen.

<u>*Beispiel:*</u>
In einem rechtwinkligen Dreieck sind die folgenden Seiten gegeben: a = 6 cm, b = 8 cm. Gesucht: c

$c^2 = a^2 + b^2 \quad | \sqrt{}$
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Umkehrung des Satz des Pythagoras:
In einem Dreieck gilt: $a^2 + b^2 = c^2$
⇒ Das Dreieck ist rechtwinklig

Mit der Umkehrung des Satz des Pythagoras lässt sich für ein Dreieck mit gegebenen Seiten überprüfen, ob es rechtwinklig ist.

<u>*Beispiel:*</u>
Ist das Dreieck mit den Seiten 9 cm, 12 cm und 16 cm rechtwinklig?

Die längste Seite ist c, also c = 16 cm, a = 9 cm, b = 12 cm
$a^2 + b^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$
$c^2 = 16^2 = 256$ ⇒ Das Dreieck ist nicht rechtwinklig

Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks:
Es gilt allgemein:

$A_{Dreieck}$ = ½ · Grundseite · Höhe

Wählt man als Grundseite eine der Katheten a oder b so gilt:

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Wählt man als Grundseite die Hypotenuse c, so gilt:

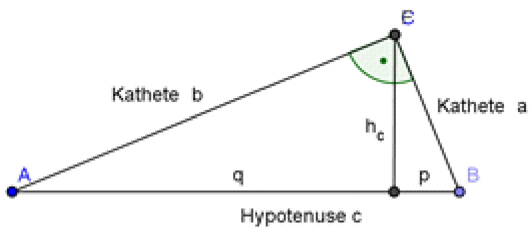
$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

Mit Hilfe des Flächeninhaltes lässt sich bspw. die Höhe auf c berechnen.

<u>*Beispiel:*</u>
Sei a = 3 cm und c = 5 cm. Bestimme den Flächeninhalt und h.
a) Berechne die fehlende Seite b
$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$
b) Berechne den Flächeninhalt A
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$
c) Berechne h mit Hilfe von $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$
$h = \frac{2 \cdot A}{c} = \frac{2 \cdot 6}{5} = 2{,}4$

Kathetensatz & Höhensatz:
Der Punkt der Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Teile p und q. Es ist somit c = p + q. Dabei gelten außerdem die folgenden Sätze:

Kathetensatz:
$a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$
Höhensatz:
$h^2 = p \cdot q$



Anhand weniger Angaben lassen sich fehlende Seitenlängen und die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks berechnen.

<u>*Beispiel:*</u>
Es ist p = 9 cm und q = 4 cm. Berechne a, b, c und h

a) Höhensatz:
$h^2 = p \cdot q = 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6$
b) $c = p + q = 9 + 4 = 13$
c) Kathetensatz:
$a^2 = p \cdot c = 9 \cdot 13 = 117 \Rightarrow a = \sqrt{117} \approx 10{,}8$
d) Kathetensatz:
$b^2 = q \cdot c = 4 \cdot 13 = 52 \Rightarrow b = \sqrt{52} \approx 7{,}2$

Strategie bei der Berechnung in komplexeren Figuren: Zerlege die Figur in rechtwinklige Dreiecke!