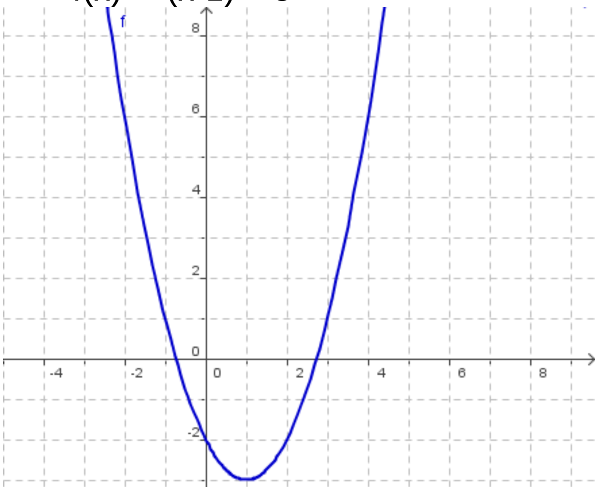
Quadratische Funktionen

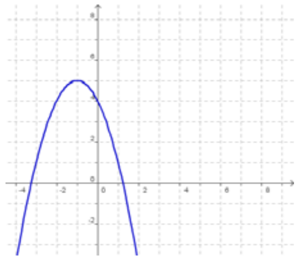
Funktionsgleichung: $f(x) = a\,(x-d)^2 + e$ bzw. $f(x) = ax^2 + bx + c$

Graph: $f(x) = (x-1)^2 - 3$



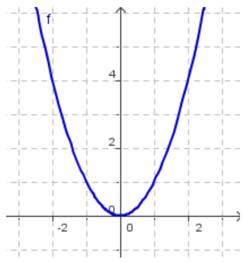
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	13	6	1	-2	-3	-2	1

Weitere Graphen:



Für negative Werte von a (d.h. $a<0$), ist die Graph nach unten geöffnet.
Beispiel: $f(x) = -(x+1)^2 + 5$

Eigenschaften:



Normalparabel

- Der Graph einer Funktion $f(x) = a\,(x-d)^2 + e$ heißt **Parabel**.
  Für $f(x) = x^2$ heißt der Graph **Normalparabel**.
- Für die <u>Normalparabel</u> gilt:
  - Sie verläuft oberhalb der x-Achse
  - Sie ist symmetrisch zur y-Achse
  - Der Punkt S(0|0) ist der „tiefste" Punkt, er heißt **Scheitelpunkt**.
- Der Graph einer Funktion $f(x) = (x-d)^2 + e$, (d.h. $a=1$) entspricht einer verschobenen Normalparabel. Dabei liegt der Scheitelpunkt bei (d|e).
- Die Form und Lage des Graphen kann man wie folgt ablesen:

$$f(x) = a\,(x - d)^2 + e$$

a: Faktor für Öffnungsrichtung und Streckung der Parabel:
$|a|<1$: Die Parabel ist <u>weiter</u> als die Normalparabel
$a = 1$: Normalparabel
$|a|>1$: Die Parabel ist <u>enger</u> als die Normalparabel
$a>0$: Parabel <u>nach oben</u> geöffnet, $a<0$: Parabel <u>nach unten</u> geöffnet

d: Verschiebung nach recht/links (x-d: d nach rechts, x+d: d nach links)

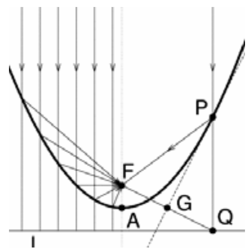
e: Verschiebung nach oben/unten (e>0: nach oben, e<0: nach unten)

Beispiele:

Funktion	a	x-d	e	Scheitelpunkt	Öffnung	Streckung
x^2	1	x	0	(0|0)	nach oben	Normalparabel
$x^2 + 3$	1	x	3	(0|3)	nach oben	Normalparabel
$(x+4)^2+3$	1	x+4	3	(-4|3)	nach oben	Normalparabel
$(x-4)^2-3$	1	x-4	-3	(4|-3)	nach oben	Normalparabel
$-(x-4)^2+5$	-1	x-4	+5	(4|5)	nach unten	Normalparabel
$-2(x-4)^2-3$	-2	x-4	-3	(4|-3)	nach unten	enger
$-0{,}2(x-4)^2-3$	-0,2	x-4	-3	(4|-3)	nach unten	weiter
$0{,}5(x-4)^2-3$	0,5	x-4	-3	(4|-3)	nach oben	weiter

Anwendung:

Jeder Hohlspiegel oder Autoscheinwerfer entspricht dem Graph einer quadratischen Funktion. Alle parallel auftreffenden Lichtstrahlen werden in einen gemeinsamen Schnittpunkt (Brennpunkt) reflektiert.
Darüber hinaus entsprechen Flugkurven von geworfenen Gegenständen, z.B. beim Speerwurf in der Leichtathletik nach unten offenen Parabeln.



Berechnungen:

Quadratische Ergänzung:

Die Form $f(x) = (x-d)^2 + e$ heißt **Scheitelpunktsform**, da sich der Scheitelpunkt direkt ablesen lässt: **S (d|e)**. Die Form $f(x) = x^2 + bx + c$ heißt **Normalform** und lässt sich mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktsform umformen.

$$\mathbf{x^2 + 6x + 7}$$

$$= \underbrace{\mathbf{x^2 + 6x \quad + 9}}_{\text{Binomische Formel}} \quad \underbrace{\mathbf{- 9 \quad + 7}}_{\text{Rest}}$$

$$6 \xrightarrow{:2} \mathbf{3} \xrightarrow{(\ )^2} 9$$

$$= \mathbf{(x + 3)^2 \qquad -2}$$

Betrachte die binomische Formel

$$(x + \mathbf{d})^2 = x^2 + 2\mathbf{d}x + \mathbf{d}^2$$

Man erhält aus der Funktion $x^2 + 6x + 7$ den Wert für **d**, indem man den Faktor vor dem x (also die 6) durch 2 dividiert (6:2=**3**).

Um eine binomische Formel zu erhalten, muss mit $\mathbf{d}^2$ ergänzt werden. In dem Beispiel wird somit die **9** (=$\mathbf{3}^2$) ergänzt. Damit die Gleichung weiterhin stimmt, wird die **9** aber anschließend sofort wieder subtrahiert. Die ersten drei Summanden entsprechen dann einer binomischen Formel.