

Die natürliche Exponentialfunktion

Gegeben ist die Funktion: $f(x) = 2^x$.

Gesucht ist die Ableitung: $f'(x)$

Bei Potenzfunktionen gibt es eine Formel: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

Frage: Gibt es auch für $f(x) = 2^x$ eine Formel für die Ableitung? Bisher noch nicht.



Wir erinnern uns, wie man allgemein die **Ableitung** bestimmt, nämlich mit dem Limes des Differenzenquotienten:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Einsetzen von $f(x) = 2^x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot 2^h - 2^x}{h} && \text{(Potenzgesetze angewendet)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot (2^h - 1)}{h} && \text{(ausklammern)} \\ &= 2^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2^h - 1)}{h} && (2^x \text{ vorklammern, da nicht von } h \text{ abhängig)} \\ &= f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2^h - 1)}{h} && \text{(statt } 2^x \text{ wieder } f(x) \text{ schreiben)} \end{aligned}$$

Es ist also:

$$f'(x) = f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2^h - 1)}{h}$$

Das gilt für alle x , also natürlich auch für $x = 0$. Einsetzen von $x = 0$ ergibt.

$$f'(0) = 1 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2^h - 1)}{h}$$

Der noch zu berechnende Limes entspricht somit gerade der Ableitung an der Stelle 0.

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$



Das sieht ganz ok aus, aber $f'(0)$ ist noch ein Zahlenwert den wir nicht kennen.

Wir bilden mal noch keinen Grenzwert, aber setzen einfach einen ganz kleinen Wert für h ein, z.B. $h = 0,01$. Dann folgt:

$$f'(0) \approx \frac{(2^h - 1)}{h} = \frac{(2^{0,01} - 1)}{0,01} = 0,7$$

Die Ableitung lässt sich also total einfach aus dem Funktionswert berechnen:

$$f'(x) = f(x) \cdot 0,7 = 2^x \cdot 0,7$$

x	0	1	2	3
f(x)	1	2	4	8
f'(x)	0,7	$2 \cdot 0,7 = 1,4$	$4 \cdot 0,7 = 2,8$	$8 \cdot 0,7 = 5,6$



Jetzt haben wir die Ableitung für $f(x) = 2^x$:

$$f'(x) = f(x) \cdot 0,7 = 2^x \cdot 0,7$$

Für $f(x) = 3^x$ kann man analog vorgehen und erhält:

$$f'(x) = f(x) \cdot 1,1 = 3^x \cdot 1,1$$

Zusammengefasst:

Wir können uns jetzt die Ableitungen für verschiedene Exponentialfunktionen aufschreiben. Wir stellen fest, dass mit größerer Basis der Faktor größer wird. Bei 3 ist er schon größer als 1, während er bei 2 noch kleiner als 1 ist.

f(x)	2^x	3^x	4^x	5^x
Faktor	0,7	1,1	1,4	1,6
f'(x)	$0,7 \cdot 2^x$	$1,1 \cdot 3^x$	$1,4 \cdot 4^x$	$1,6 \cdot 5^x$



Frage: Gibt es eine Basis a zwischen 2 und 3, so dass der Faktor gerade genau 1 ist? Dann wäre die Ableitung total einfach, nämlich: $f'(x) = f(x)$

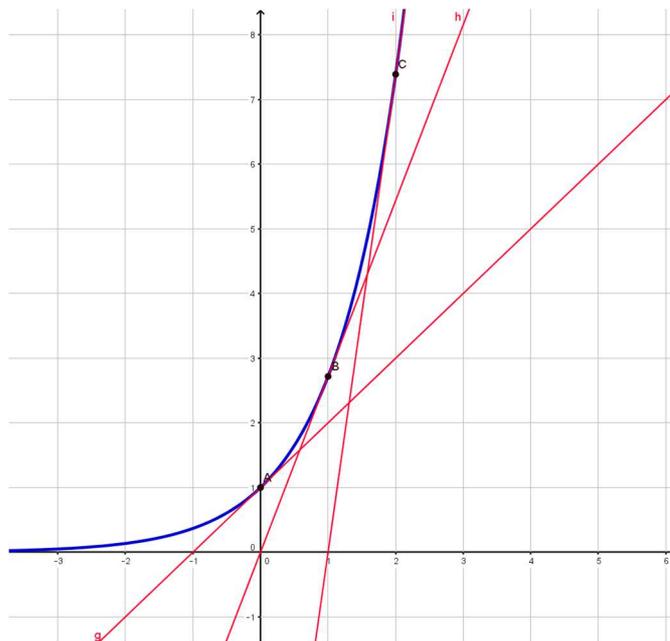
Diesen Zahlenwert gibt es !

Die Zahl a, für die die Funktion a^x mit ihrer Ableitung übereinstimmt, heißt **Eulersche Zahl e**. Dabei ist **$e = 2,71828$** .

Die zugehörige Exponentialfunktion **$f(x) = e^x$** heißt **natürliche Exponentialfunktion**.

Es gilt:

$$f'(x) = f(x) = e^x$$



Die Steigung der Tangente an einem beliebigen Punkt (=Ableitung) stimmt jeweils mit dem Funktionswert in diesem Punkt überein.

x	0	1	2
f(x)	1	2,71828	7,3891
f'(x)	1	2,71828	7,3891