Stochastik

Die **Stochastik** besteht aus zwei Teilgebieten,
der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die **Statistik** beschreibt die Vergangenheit und verwendet Informationen, die (in realen Versuchen) tatsächlichen aufgetreten sind.

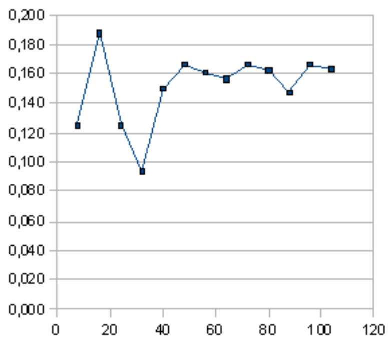
Die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** "beschreibt" die Zukunft. Sie gibt Informationen darüber, welche Werte (aufgrund bestimmter Annahmen) für zukünftige Versuche "erwartet" werden können.

Die Stochastik wird erheblich vom **Zufall** beeinflusst, man spricht daher in der Stochastik oft von **Zufallsexperimenten**. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Begriff "**Wahrscheinlichkeit**".

Begriffe	**Erklärung + Beispiele beim Würfeln**
Ergebnis	Das Resultat eines Zufallsexperiments wird als Ergebnis bezeichnet.
Ergebnisraum Ω	Alle bei einem Experiment möglichen Ergebnisse bilden den Ergebnisraum Ω (= die Menge aller möglichen Ergebnisse). *Bsp.: Ω = {1,2,3,4,5,6}*
Ereignis	Ereignisse E kann man als Zusammenfassung mehrerer Ergebnisse zu einem Ganzen auffassen. Es gilt: $E \subseteq \Omega$ *Bsp.: E = „es fällt eine gerade Zahl“ = {2,4,6}*
Elementarereignis	Einelementige Ereignisse nennt man Elementarereignisse. *Bsp.: E = „Es fällt die 4“ = {4}*
unmögliches Ereignis	Ein Ereignis, das nicht eintreten kann, nennt man unmögliches Ereignis E = { }. *Bsp.: E = „Es fällt die 7“ = { }*
sicheres Ereignis	Besteht das Ereignis aus den gleichen Elementen wie der Ergebnisraum Ω , also E = Ω, so nennt man das Ereignis ein sicheres Ereignis. *Bsp.: E = „Es fällt eine Zahl von 1 bis 6“ = {1,2,3,4,5,6}*
Gegenereignis	Zu jedem Ereignis E gibt es auch eine sogenanntes Gegenereignis $\overline{E}$. Dieses tritt genau dann ein, wenn E nicht eintritt. Es gilt: $\overline{E} = \Omega \setminus E$ *Bsp.: E = {1,2,3}* $\Rightarrow \overline{E}$ *= {4,5,6}*
Und-Ereignis	*Schnittmenge zweier Ereignisse:* Symbol: ∩ *Bsp.:* $E_1 = \{1,2,3\}$, $E_2 = \{2,4,6\} \Rightarrow E = E_1 \cap E_2 = \{2\}$
Oder-Ereignis	*Vereinigungsmenge zweier Ereignisse:* Symbol: ∪ *Bsp.:* $E_1 = \{1,2,3\}$, $E_2 = \{2,4,6\} \Rightarrow E = E_1 \cup E_2 = \{1,2,3,4,6\}$

Gesetz der großen Zahlen und Wahrscheinlichkeit:

Trägt man bspw. beim Würfeln die relative Häufigkeit für das Fallen einer 6 aus, so erkennt man, dass sich die relative Häufigkeit h(6) für wachsendes n einem bestimmten Wert annähert. Diese Stabilisierung der relativen Häufigkeiten bezeichnet man als das ***Gesetz der großen Zahlen***.



Der Stabilisierungswert, der sich für große n einstellt, nennt man ***Wahrscheinlichkeit P*** des Ereignisses A (P wie Probability).

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A nennt man P(A).
Dabei gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$
P(A) kann als Bruch oder in %-Schreibweise angegeben werden.

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:
Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{ e_1; e_2; .... ; e_n \}$.
Eine Zuordnung, die jedem Elementarereignis $\{e_i\}$ genau eine reelle Zahl $P(e_i)$ zuordnet, heißt ***Wahrscheinlichkeitsverteilung***.

Eigenschaften:

$$P(e_i) \geq 0 \text{ (für alle i)}$$

$$\sum_i P(e_i) = 1 \quad \Rightarrow P(e_i) < 1$$

$P(e_i)$ heißt ***Wahrscheinlichkeit* des Elementarereignisses** $\{e_i\}$.

Betrachtet man ein Ereignis E, das aus mehreren Elementarereignissen besteht, dann gilt:
$P(E) = P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_k)$
$P(E) = 0$, falls $E = \{ \}$ (unmögliches Ereignis)
$P(E) = 1$, falls $E = \Omega$ (sicheres Ereignis)

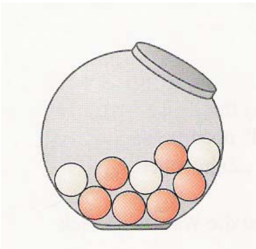
Häufig verwendet man auch die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, die sogenannte ***Gegenwahrscheinlichkeit***, um Rechnungen zu vereinfachen.

$$\boxed{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$$

Betrachtet man zwei beliebige Ereignisse $E_1, E_2 \subset \Omega$, dann gilt für die Vereinigungsmenge der beiden Ereignisse

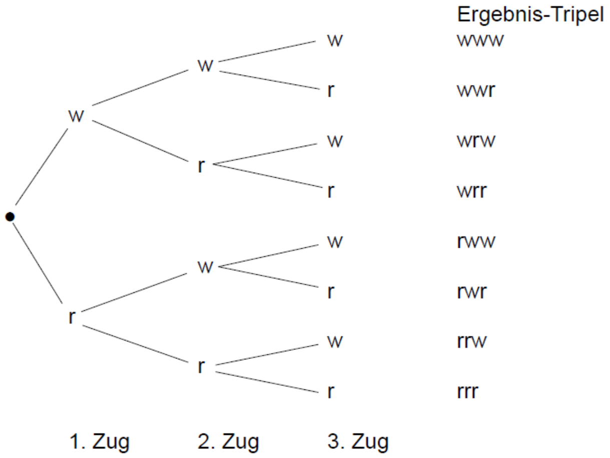
$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

Mehrstufige Zufallsexperimente
Mehrstufige Zufallsexperimente sind Experimente, die mehrere Male (n-mal) hintereinander ausgeführt werden. Die Ergebnisse n-stufiger Zufallsexperimente sind sog. ***n-Tupel*** $(e_1, e_2, e_3, ... , e_n)$, wobei e_i das Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist.
Mehrstufige Zufallsexperimente sind z.B. das mehrmalige Werfen einer Münze, das mehrmalige Würfeln oder das wiederholte Ziehen einer Kugel aus einer Urne, was ein sehr beliebtes Modell in der Stochastik ist (***Urnenmodell***).

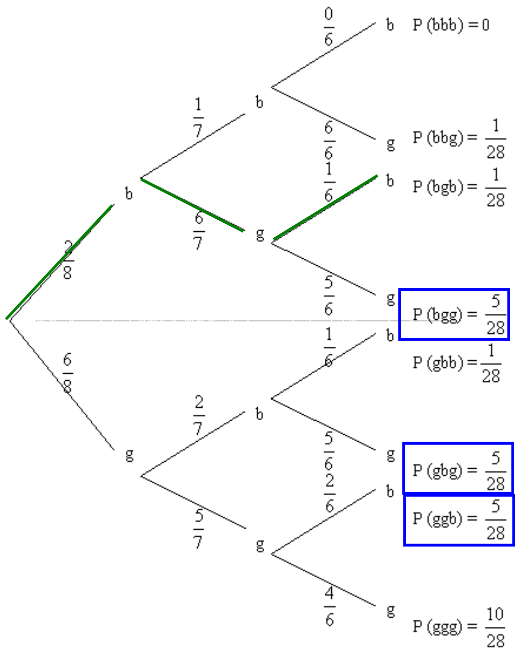


Beispiel:
3 maliges Ziehen aus der Urne mit roten und weißen Kugeln. Die möglichen Ergebnisse (3-Tupel = Tripel) sind: (www), (wwr), (wrw), (wrr), (rww), (rwr), (rrw), (rrr)

Um eine übersichtliche Darstellung zu haben, wählt man in der Stochastik meist das ***Baumdiagramm***. Dies hilft auch, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.



Beispiel: Dreimaliges Ziehen aus einer Urne mit 2 blauen und 6 grünen Kugeln.
Man gibt entlang der ***Pfade*** an, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese eintreten.



Beispiel: 1. Pfadregel
P (bgb)
= 2/8 · 6/7 · 1/6
= 1/28

Beispiel: 2. Pfadregel
P („zweimal grün“)
= P (bgg) + P (gbg) + P (ggb)
= 5/28 + 5/28 + 5/28
= 15/28

Es gibt sehr viele mögliche Ergebnisse, d.h. der Baum wird schnell unübersichtlich !
Deshalb: nur das zeichnen, was wirklich gebraucht wird: ***reduziertes* Baumdiagramm**

Pfadregeln:
1. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** ist gleich dem **Produkt** aller Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zum Ergebnis führt.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der **Summe** aller Ergebniswahrscheinlichkeiten, die zum Ereignis dazugehören.

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsversuch heißt ***Laplace-Experiment***, wenn alle Elementarereignisse $\{e_i\}$ aus dem Ergebnisraum Ω die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.
Besteht also der Ergebnisraum Ω aus n verschiedenen Elementarereignissen, man schreibt |Ω| = n , dann gilt:

$$P(e_i) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Typische Beispiele für Laplace-Experimente sind Würfeln, das Werfen einer Münze oder das Ziehen einer Kugel aus einer Urne.

Die Bestimmung einer **Laplace-Wahrscheinlichkeit** läuft also auf ein "Abzählen" zweier Anzahlen hinaus:
1. Die Anzahl aller Elementarereignisse (also die Anzahl der Elemente in Ω)
2. Die Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse (also die Anzahl der Elemente in A).

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl aller Elementarereignisse}}$$

Für kleine Mengen sind diese Anzahlen recht einfach zu bestimmen, für größere Mengen benötigt man jedoch ***kombinatorische Abzählverfahren***, um zum Ergebnis zu kommen.