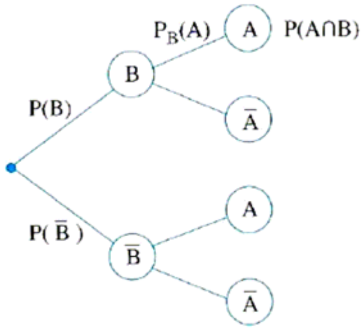
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Man betrachtet eine Wahrscheinlichkeit P(A) für ein Ereignis A.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, ändert sich jedoch ggf., wenn bereits ein Ereignis B eingetreten ist.



Man spricht in diesem Zusammenhang von einer ***bedingten Wahrscheinlichkeit*** und schreibt $P_B(A)$ statt P(A). (lies: Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B) $P_B(A)$ gibt also an, mit welcher Wahrscheinlichkeit A eintritt, wenn bereits B eingetreten ist.

Die Bestimmung von $P_B(A)$ erfolgt nach der folgenden Formel:

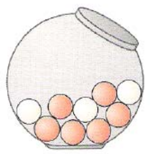
$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{oder} \quad P_B(A) = \frac{Anz.\ Elemente\ in\ A \cap B}{Anz.\ Elemente\ in\ B}}$$

Die Formel folgt aus $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{Anz.\, günst.\, Ergebnisse}{Anz.\, aller\, Ergebnisse}$ mit:

günstige Ergebnisse = alle Ergebnisse aus A, die auch in B vertreten sind, d.h. aus $A \cap B$.
alle Ergebnisse = Ergebnisse der Menge B

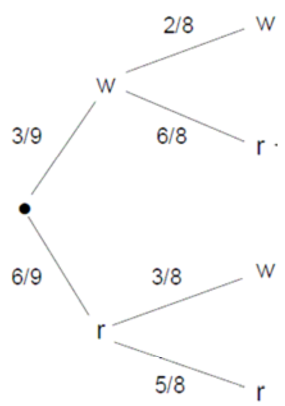
Außerdem stellt die Formel eine Umformung der Pfadregel $\mathbf{P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B)}$ dar.

Beispiel:



Aus einer Urne mir 6 roten (r) und 3 weißen (w) Kugeln wird ohne Zurücklegen gezogen.
Für das Ereignis A: „Ziehen einer weißen Kugel“ gilt: P(A) = 1/3

Für das Ereignis B: „Im ersten Zug wird eine weiße Kugel gezogen“ ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel:



Man berechnet:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{oder} \quad P_B(A) = \frac{Anz.\ Elemente\ in\ A \cap B}{Anz.\ Elemente\ in\ B}$$

Wurde im ersten Zug eine weiße Kugel gezogen, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ = 2/8.
(Es befinden sich dann noch 8 Kugeln in der Urne: 2 weiße und 6 rote).

Vierfeldertafel

Beispiel
Eine Urne enthält 200 Kugeln.
140 Kugeln bestehen aus dem Material Holz und 60 Kugeln sind aus Kunststoff.
50 der Holzkugeln sind mit der Farbe rot gestrichen und 90 sind grün.
20 der Kunststoffkugeln sind rot und 40 sind grün.
Folgende Ereignisse werden definiert:

A: Die Kugel ist aus Holz	$\bar{A}$: Die Kugel ist aus Kunststoff
B: Die Kugel ist rot	$\bar{B}$: Die Kugel ist grün

Fragestellung: Jemand zieht eine Kugel und spürt mit der Hand, dass es sich um eine Holzkugel handelt. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel in seiner Hand rot ist? D.h. gesucht wird $P_A(B)$.

Die Kugeln tragen zwei Merkmale mit jeweils zwei Ausprägungen. Dieser Sachverhalt kann in einer Vierfeldtafel dargestellt werden:

Vierfeldertafel mit Anzahlen:

	B **: rot**	$\overline{B}$ **: rot**	**Summe**
A **: Holz**	50	90	140
$\overline{A}$ **: Kunststoff**	20	40	60
Summe	70	130	200

Mit den Daten der Tafel lassen sich direkt folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$P(A)=\frac{140}{200}=0{,}7 \quad P(\overline{A})=\frac{60}{200}=0{,}3 \quad P(A\cap B)=\frac{50}{200}=0{,}25 \quad P(A\cap\overline{B})=\frac{90}{200}=0{,}45$$

$$P(B)=\frac{70}{200}=0{,}35 \quad P(\overline{B})=\frac{130}{200}=0{,}65 \quad P(\overline{A}\cap B)=\frac{20}{200}=0{,}1 \quad P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{40}{200}=0{,}2$$

Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten:

	B **: rot**	$\overline{B}$ **: rot**	**Summe**
A **: Holz**	$P(A\cap B)$ =0,25	$P(A\cap\overline{B})$ =0,45	$P(A)$ =0,70
$\overline{A}$ **: Kunststoff**	$P(\overline{A}\cap B)$ =0,10	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ =0,20	$P(\overline{A})$ =0,30
Summe	$P(B)$ =0,35	$P(\overline{B})$ =0,65	1

Bestimmung von $P_B(A)$: $\quad P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}25}{0{,}35}\approx 0{,}36$

Wenn man also weiß, dass die gezogene Kugel aus Holz besteht, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie die Farbe rot hat 36%.

Unabhängigkeit

Durch das Eintreten eines bestimmten Ereignisses B kann sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines weiteren Ereignisses A ändern (bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$).

Im allgemeinen ist $P_B(A) \neq P(A)$. In diesem Fall nennt man A ***abhängig*** von B.

Wird die Wahrscheinlichkeit P(A) jedoch durch das Eintreten des Ereignisses B ***nicht geändert***, gilt also $P(A) = P_B(A)$ und auch umgekehrt $P(B) = P_A(B)$, so nennt man A und B ***unabhängige Ereignisse***.

Die (Un-)Abhängigkeit von zwei Ereignissen kann recht einfach gezeigt werden:

Am ***Baumdiagramm*** können die Wahrscheinlichkeiten direkt abgelesen werden.

Ist die Wahrscheinlichkeit in der 2. (oder höheren) Stufe zu einem Ergebnis in jedem Teilbaum die selbe, dann ist sie offensichtlich nicht von vorherigen Ergebnissen abhängig (wie z.B. beim Ziehen mit Zurücklegen).
Gibt es unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zu gleichen Ergebnissen, sind die Ereignisse abhängig voneinander (wie beim Ziehen ohne Zurücklegen).

In einer ***Vierfeldertafel*** kann die (Un-)Abhängigkeit rechnerisch gezeigt werden:

Gilt die Gleichung $\boxed{P(A) \cdot P(B) = P(A\cap B)}$

so sind die Ereignisse A und B unabhängig voneinander.

Man kann zudem erkennen, dass in der Vierfeldertafel zweier unabhängiger Ereignisse die 2 Zahlenpaare (sowohl nach rechts als auch untereinander) das selbe Verhältnis haben.