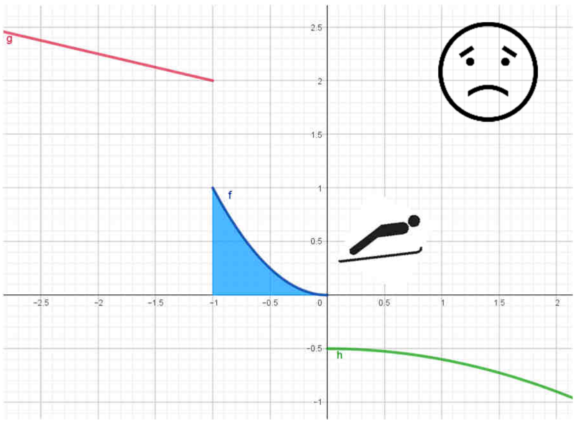
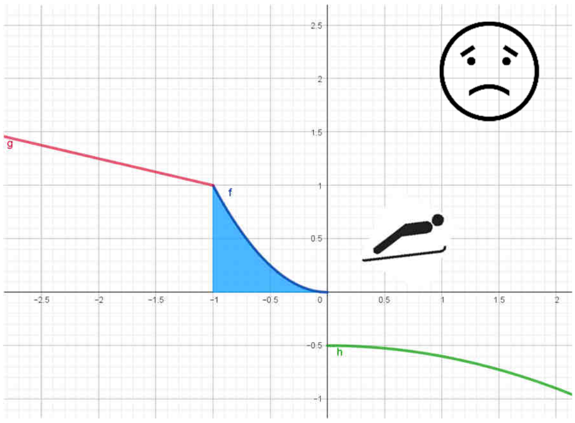
Tangentengleichung

Der blaue Endbereich einer Skisprungschanze, die durch die Funktionsgleichung f(x) gegeben ist, soll an der Stelle x_0 um eine gerade Anlaufspur nach links verlängert werden. Gesucht ist die Funktionsgleichung dieser linearen Funktion g(x).

Die folgenden linearen Funktionen sind dabei aber nicht sinnvoll.



Lücke zwischen Anlauf und Schanzentisch



Kante zwischen Anlauf und Schanzentisch

Welche **Voraussetzungen** müssen also an diese lineare Funktion gesetzt werden?

1. Die lineare Funktion muss an der Stelle x_0 natürlich die Sprungschanze <u>berühren</u>, d.h. die Funktionswerte von f(x) und g(x) müssen an dieser Stelle übereinstimmen.
2. Damit es keine Kante gibt, muss die lineare Funktion an der Stelle x_0 <u>dieselbe Steigung</u> *m* wie die Sprungschanze haben, d.h. die Funktionswerte von f'(x) und g'(x) müssen an dieser Stelle übereinstimmen.

Die Voraussetzungen in Kurzform:

1. $g(x_0) = f(x_0)$
2. $m = g'(x_0) = f'(x_0)$

Gesucht ist nun die Funktionsgleichung von g(x). Als lineare Funktion gilt:

$$g(x) = m \cdot x + b$$

Nach Voraussetzung 2 ist $\mathbf{m = f'(x_0)}$ und es folgt:

$$g(x) = f'(x_0) \cdot x + b$$

Um b zu bestimmen, muss man den einen gemeinsamen Punkt $P(x_0|g(x_0))$ einsetzen:

$$g(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

$$\Rightarrow b = g(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Mit der Voraussetzung 1 lässt sich das $g(x_0)$ ersetzen:

$$\mathbf{b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0}$$

Einsetzen von *m* und *b* in g(x) ergibt:

$$g(x) = m \cdot x + b = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

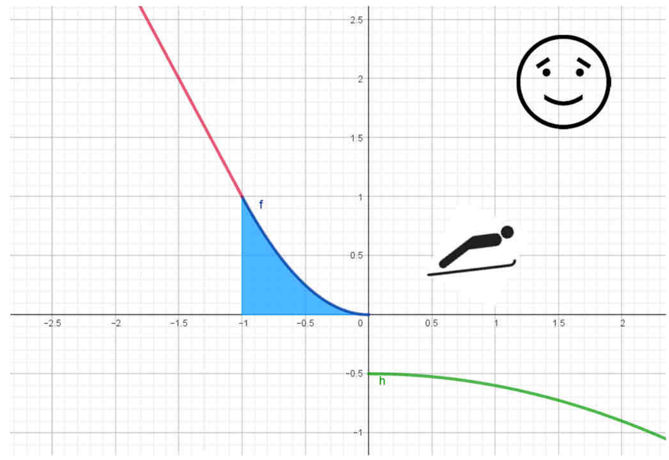
$$= f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$

Ausklammern von $f'(x_0)$ ergibt die

Allgemeine Funktionsgleichung einer Tangente g(x) an einen Graphen von f(x) an der Stelle x_0:

$$\mathbf{g(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

Beispiel:



So sieht dann die perfekte Anlaufspur aus

Bestimme die Tangentengleichung g(x) einer Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = -1$

Aus der Aufgabe entnimmt man:

$f(x) = x^2$ und $x_0 = -1$

Somit ist $f(x_0) = x_0^2 = (-1)^2 = 1$

Bestimmen der Ableitung: $f'(x) = 2x$

Somit ist $f'(x_0) = f'(-1) = 2x_0 = -2$

Einsetzen in die allgemeine Tangentengleichung:

$g(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$= -2 \cdot (x + 1) + 1$

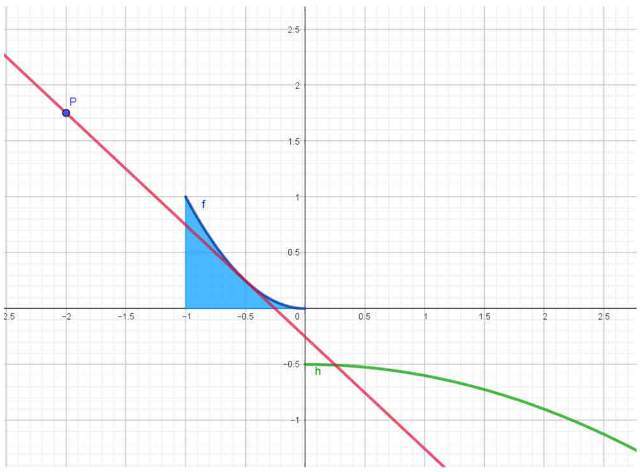
$= -2x - 2 + 1$

$= -2x - 1$

Die Tangentengleichung beträgt $g(x) = -2x - 1$

Tangentengleichung durch einen Punkt P außerhalb des Graphen:

Die allgemeine Formel zur Tangentengleichung funktioniert auch, wenn man die Tangente durch einen Punkt P legen will, der nicht auf dem Graph von f(x) liegt. Die Anlaufspur soll also durch P verlaufen. In die allgemeine Tangentengleichung setzt man den Punkt P (x|g(x)) ein. Man erhält eine Gleichung, in der nur noch die Unbekannte x_0 auftritt. Diese lässt sich berechnen und die finale Gleichung der Tangente aufstellen.



Beispiel:

Bestimme die Gleichung einer Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ durch den Punkt P (-2|1,75).

Es ist: $f(x) = x^2$ und $f'(x) = 2x$. Somit sind $f(x_0) = x_0^2$ und $f'(x_0) = 2x_0$

Tangentengleichung:	$g(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$	
	$g(x) = 2x_0 \cdot (x - x_0) + x_0^2$	|T
	$g(x) = 2x_0 \cdot x - 2x_0^2 + x_0^2 = -x_0^2 + 2x_0 \cdot x$	
Einsetzen von P (-2|1,75)	$1{,}75 = -x_0^2 - 4x_0$	|-1,75
	$0 = -x_0^2 - 4x_0 + 1{,}75$	| PQ oder ABC-Formel
PQ oder ABC-Formel liefert:	$x_{0,1} = -0{,}5$ und $x_{0,2} = -3{,}5$	$x_0 = -0{,}5$ ist die gesuchte Stelle
Einsetzen von $x_0 = -0{,}5$:	$g(x) = -x_0^2 + 2x_0 \cdot x = -0{,}25 - x$ also: **$g(x) = -x - 0{,}25$**	