Polynomdivision

Bisher: Berechnung von Nullstellen von quadratischen Funktionen (also vom Grad 2)

Aus dem Term $x^2 - 3x + 2$ kann man mit Hilfe der abc- oder pq-Formel die beiden Nullstellen $x_1=1$ und $x_2=2$ ermitteln. Der Term lässt sich somit auch in Linearfaktoren schreiben, an denen sich die Nullstellen direkt ablesen lassen.

Darstellung	**Quadratisches Polynom**	**Umformung**	**Linearfaktoren**
Eigenschaft	☹ Nullstellen können **nicht** direkt abgelesen werden	PQ- oder ABC-Formel anwenden	☺ Nullstellen können direkt abgelesen werden
Besipielterm	$\mathbf{x^2 - 3x + 2}$	=	**(x-1)·(x-2)**

Neu: Berechnung von Nullstellen von Polynomen dritten Grades

Es gilt: Auch Polynome vom Grad 3 lassen sich in Linearfaktoren schreiben.

Es gilt beispielsweise: $\underbrace{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)}_{\text{Linearfaktoren}} = (x^2 - 1)\cdot(x-2) = \underbrace{x^3 -2x^2 -x + 2}_{\text{Polynom vom Grad 3}}$

Problem: Wie lässt sich umgekehrt aus dem Polynom vom Grad 3 die Nullstellen und damit die Linearfaktoren finden?

Die Ermittlung aller Nullstellen funktioniert nur, wenn man eine Nullstelle durch Ausprobieren ermitteln kann oder sie angegeben wird.

Beispiel:
Gegeben sei $f(x) = x^3 +3x^2 - 4x -12$.

Eine Nullstelle ist 2, da $f(2) = 2^3 + 3\cdot2^2 - 4\cdot2 - 12 = 0$. Ein Linearfaktor ist somit (x-2).

$\Rightarrow x^3 +3x^2 -4x -12 = (x-2)\cdot$ **Restpolynom vom Grad 2** $\quad | : (x-2)$

$\Rightarrow (x^3 +3x^2 -4x -12) : (x-2) =$ **Restpolynom vom Grad 2**

Die Berechnung des **Restpolynoms vom Grad 2** ist das Ergebnis der Rechnung $(x^3 +3x^2 -4x -12) : (x-2)$ und erfolgt **mit Hilfe der Polynomdivision**. Der Algorithmus entspricht der herkömmlichen schriftlichen Division.

Polynomdivision	**Vergleich: Herkömmliche Division**
$(x^3 + 3x^2 -4x -12) : (x-2) = x^2 + 5x + 6$ $\underline{-(x^3 - 2x^2)}$ $5x^2 -4x$ $\underline{-(5x^2-10x)}$ $6x -12$ $\underline{-(6x -12)}$ 0	$548 : 4 = 137$ $\underline{-4}$ 14 $\underline{-12}$ 28 $\underline{-28}$ 0

Vom Restpolynom (hier: $x^2 + 5x + 6$) lassen sich mit pq- oder abc-Formel die weiteren Nullstellen ermitteln (hier: $x_2=-2$, $x_3=-3$), so dass sich der Term komplett in Linearfaktoren schreiben lässt:

Darstellung	**Polynom dritten Grades**	**Umformung**	**Linearfaktoren**
Eigenschaft	☹ Nullstellen können **nicht** direkt abgelesen werden	1. Eine Nullstelle durch Ausprobieren ermitteln 2. Polynomdivision 3. PQ- oder ABC-Formel für Restpolynom	☺ Nullstellen können direkt abgelesen werden
Beispielterm	$\mathbf{x^3 + 3x^2 -4x -12}$	=	**(x-2) · (x+2) · (x+3)**

Polynomdivision - Schritt für Schritt erklärt

1. Man teilt den ersten Summanden (hier: x^3) durch x und schreibt das Ergebnis auf die rechte Seite.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) : (x - 2) = x^2 + 5x + 6 \\
-(x^3 - 2x^2) \\
\hline
\quad 5x^2 - 4x \\
\quad -(5x^2 - 10x) \\
\hline
\qquad\quad 6x - 12 \\
\qquad\quad -(6x - 12) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

2. Man multipliziert den ermittelten Summanden (hier: x^2) mit dem gesamten Linearfaktor (hier: (x-2))

3. Man subtrahiert das untere vom oberen Polynom

4. Man holt den nächsten Summanden herunter.

5. Man wiederholt die Schritte 1-4 jeweils für die neue Zeile.