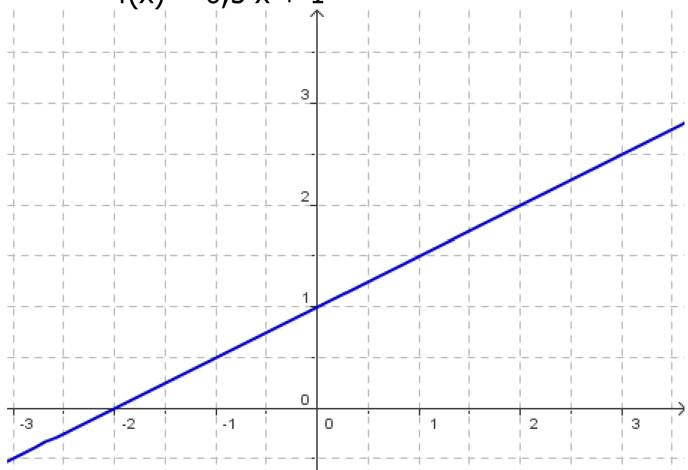
Lineare Funktionen

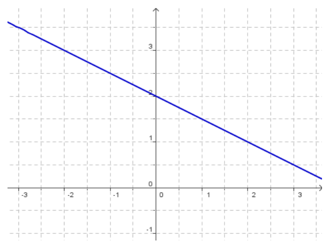
Funktionsgleichung: $f(x) = m \cdot x + b$

Graph: $f(x) = 0{,}5\,x + 1$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5

Weitere Graphen:

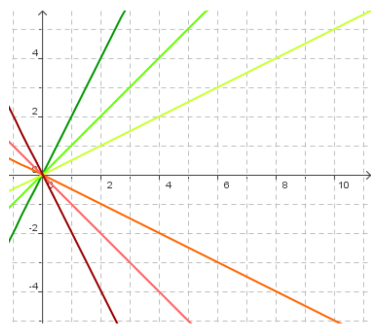


Für negative Werte von m (d.h. m<0), ist die Steigung negativ.
Der Graph fällt.
Beispiel: $f(x) = -0{,}5x + 2$

Eigenschaften:

- Der Funktionsgraph ist eine **Gerade**.
- Der Graph der Funktion $f(x) = mx + b$ geht durch den Punkt P (0|b). b wird der **y-Achsenabschnitt** genannt.
- Der Wert m der Funktion $f(x) = mx + b$ wird **Steigung** des Graphen genannt. Je größer der Betrag von m ist, desto steiler verläuft der Graph.
- Für positive Werte von m (m>0) ist der Graph steigend, für negative Werte (m<0) fallend.
- Der x-Wert, an dem der Graph die x-Achse schneidet, heißt **Nullstelle**.

Steigungen:



Steigungen lassen sich in zur Kontrolle abschätzen.
- **dunkelgrün**: Steigung > 1
- **hellgrün** (Winkelhalbierende der Achsen): Steigung = 1
- **gelb**: Steigung zwischen 0 und 1
- **schwarz** (x-Achse): Steigung = 0
- **orange**: Steigung zwischen 0 und -1
- **hellrot** (Winkelhalbierende der Achsen): Steigung = -1
- **dunkelrot**: Steigung < -1

Anwendung:

In den USA wird zur Angabe von Temperaturen nicht die bei uns gebräuchliche Celsius-Skala mit der Temperatureinheit 1°C (1 Grad Celsius), sondern die Fahrenheit-Skala mit der Temperatureinheit 1°F (1 Grad Fahrenheit) benutzt.
Um den Fahrenheitwert aus dem Celsiuswert zu errechnen, kann man die folgende Formel benutzen:

Fahrenheitwert = $1{,}8 \cdot$ Celsiuswert + 32
$f(x) = 1{,}8 \cdot x + 32$

Grad Fahrenheit bei 25°C:
$f(25) = 1{,}8 \cdot 25 + 32 = 77$ (°F)

Berechnungen:

Berechnung der Funktionsgleichung aus zwei Punkten:

Zur Berechnung der Funktionsgleichung werden zwei Punkte benötigt. Entweder man liest diese aus dem Graphen ab oder die Punkte sind in der Aufgabe angegeben. Die Punkte werden im Folgenden mit $P_1\ (x_1|y_1)$ und $P_2\ (x_2|y_2)$ bezeichnet.

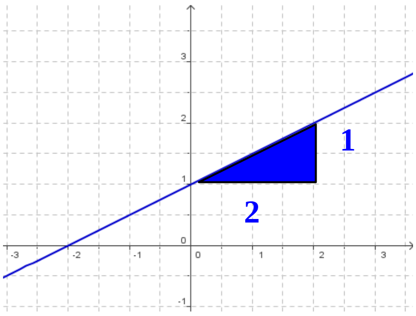
1. Berechnung der Steigung m

Die Steigung m wird aus der folgenden Formel berechnet:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Beispiel: $P_1\ (0|2)$, $P_2\ (2|3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \Rightarrow y = 0{,}5x + b$$



Man kann sich die Berechnung an der nebenstehenden Grafik verdeutlichen.
Zeichne ein **Steigungsdreieck** in beliebiger Größe an den Graphen. Die Steigung m lässt sich wie folgt berechnen.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - Unterschied}{x - Unterschied} = \frac{Dreieckh\ddot{o}he}{Dreieckbreite}$$

Abfallende Geraden haben dabei eine negative Steigung.

2. Berechnung des y-Achsenabschnitts b

Nachdem man die Steigung m ermittelt hat, setzt man einen der beiden Punkte in die Funktionsgleichung y = mx + b ein und löst diese nach b auf.

Beispiel: y = 0,5x + b
Einsetzen von Punkt $P_1\ (0|2)$ oder $P_2\ (2|3)$. Wähle beispielsweise $P_2\ (2|3)$:

$$3 = 0{,}5 \cdot 2 + b \qquad | \ T$$
$$3 = 1 + b \qquad | \ -1$$
$$2 = b$$

⇒ Die Funktionsgleichung lautet: y = 0,5x + 2

Berechnung der Nullstelle:

An der Nullstelle ist der Funktionswert 0. Zur Berechnung der Nullstelle wird daher y=0 gesetzt. Anschließend wird nach x aufgelöst. Man erhält die Nullstelle.

Allgemein:		*Beispiel:*	
y = mx + b		y = 0,5x + 2	
0 = mx + b	|-b	0 = 0,5x + 2	|-2
-b = mx	|:m	-2 = 0,5x	|:0,5
$-\frac{b}{m} = x$		-4 = x	

Ermitteln der Funktionsgleichung aus einem Graphen:

Berechne die Steigung m mit Hilfe eines Steigungsdreiecks wie oben beschrieben. Der y-Achsenabschnitt b lässt sich als Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse ablesen. Die gefundenen Werte für m und b in die Funktionsgleichung f(x) = mx + b einsetzen.