Kurvendiskussion

1. Ableitungen

Für die spätere Untersuchung bestimmt man die ersten drei Ableitungen: f ’(x), f ’’(x), f ’’’(x)

Zur Ermittlung der Ableitung helfen die folgenden Regeln:

	$f(x) = x^n$	$\rightarrow$	$f'(x) = n x^{n-1}$
	$f(x) = \sin(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = \cos(x)$
	$f(x) = \cos(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = -\sin(x)$
	$f(x) = e^x$	$\rightarrow$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = \ln(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Produktregel:	$f(x) = u(x)\cdot v(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\rightarrow$	$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
Kettenregel:	$f(x) = u \circ v(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

2. Definitionsbereich

Man bestimmt den Definitionsbereich der Funktion, denn nur innerhalb dieses Bereiches ist es sinnvoll, Untersuchungen über die Eigenschaften der Funktion anzustellen.

Beachte den eingeschränkten Definitionsbereich bei:
Quotienten (→ Nenner darf nicht Null sein), **Wurzeln** (→ Wert unter der Wurzel muss positiv sein), **Logarithmus** (ln(x) ist nur für x>0 definiert).

3. Symmetrien:

Man stellt fest, ob die Funktion achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse oder punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist. Bei einer vorliegenden Symmetrie braucht die Funktion nur noch für $x \geq 0$ untersucht werden.

Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$
Bei ganzrationale Funktionen: Es kommen nur Summanden mit ungeraden Exponenten vor.
Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
Bei ganzrationale Funktionen: Es kommen nur Summanden mit geraden Exponenten vor.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

Man sucht für das spätere Zeichnen des Graphen die Schnittpunkte mit den Achsen. Ggf. eine Nullstelle raten und anschließend eine Polynomdivision durchführen.

Nullstellen:
Nullstellen sind Lösungen der Gleichung f(x) = 0.
Schnittstelle mit der y-Achse:
Bestimme f(0).

Tipp: Versuche f(x) als Faktoren darzustellen und überprüfe, wann die Faktoren Null werden. **Beachte:** e^x wird nie Null.

5. Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ bzw. gegen Definitionslücken

Untersuchung der Funktion an den Randpunkten des Definitionsbereichs. Wenn der Definitionsbereich nicht beschränkt ist, dann sind die beiden Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ zu bestimmen. Das Verhalten wird bei rationalen Funktionen durch den größten Exponenten bestimmt.

Bei Quotienten, bei denen der Grenzwert des Zählers und des Nenners 0 ist, hilft es die jeweilige Steigung zu betrachten, um zu ermitteln, welcher Term schneller gegen 0 geht. So benutzt man den **Satz von De l’ Hospital:**

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$$ falls u(a) = v(a) = 0 sowie u(x) und v(x) differenzierbar

6. Extrempunkte und Monotonieverhalten

Bestimmen der relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte). Nach den Extrem<u>stellen</u> auch die Extrem<u>punkte</u> bestimmen!

Hochpunkt:
$f'(x)=0$ und $f''(x)<0 \Rightarrow$ Maximum
Tiefpunkt:
$f'(x)=0$ und $f''(x)>0 \Rightarrow$ Minimum

Vorzeichenwechselkriterium:
$f'(x)=0$ und $f''(x)=0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel untersuchen
$f'(x)$ wechselt von + nach – $\Rightarrow$ Wechsel von mon. steigend $\rightarrow$ mon. fallend $\Rightarrow$ Maximum
$f'(x)$ wechselt von – nach + $\Rightarrow$ Wechsel von mon. fallend $\rightarrow$ mon. steigend $\Rightarrow$ Minimum

Monotonie:
$f'(x)>0 \Rightarrow$ monoton steigend $\qquad$ $f'(x)<0 \Rightarrow$ monoton fallend

7. Wendepunkte und Krümmungsverhalten

Bestimmen der Wendepunkte, bzw. der Sattelpunkte

Wendepunkt:
$f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt
Sattelpunkt:
$f'(x)=0$ und $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Vorzeichenwechselkriterium:
$f''(x)=0$ und $f'''(x)=0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel untersuchen
$f''(x)$ wechselt von + nach – $\Rightarrow$ Wechsel von linksgekrümmt $\rightarrow$ rechtsgekrümmt
$f''(x)$ wechselt von – nach + $\Rightarrow$ Wechsel von rechtsgekrümmt $\rightarrow$ linksgekrümmt

Krümmungsverhalten:
$f''(x)>0 \Rightarrow$ linksgekrümmt $\qquad$ $f''(x)<0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt

8. Graph zeichnen

Alle bekannten Punkte und Verhalten gegen $\pm\infty$ sowie gegen Definitionslücken einzeichnen. Ggf. weitere Punkte in kleiner Wertetabelle berechnen.

9. Flächenberechnung

Bestimme eine Stammfunktion F(x) zu f(x) und berechne das Intergral in den gegebenen Grenzen:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hilfen zur Integration:

$f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$f(x) = \sin(x) \rightarrow F(x) = -\cos(x)$

$f(x) = \cos(x) \rightarrow F(x) = \sin(x)$

$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \rightarrow F(x) = \ln(g(x))$

Partielle Integration: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Integration durch Substitution: *Beispiel*: $\int e^{2x}dx$

1. Ersetze g(x) durch u. — Substitution: $2x = u$
2. Leite die Funktion u nach x ab — $\frac{du}{dx} = 2$
3. Nach dx auflösen und in Integral einsetzen — $dx = 0{,}5\,du \Rightarrow \int e^u \cdot 0{,}5du$
4. Integrieren und rücksubstituieren — $\int e^u \cdot 0{,}5du = 0{,}5\,e^u = 0{,}5\,e^{2x}$

10. Ortskurve

Bei Funktionsscharen $f_t(x)$: Um Ortskurven von Extrem-/Wendepunkten zu bestimmen, geht man wie folgt vor:

- Die x-Koordinate der Extrempunkte nach t auflösen
- Dieses t in $f_t(x)$ einsetzen. Man erhält dadurch die von x abhängige Funktion der Ortskurve.