Testen von Hypothesen

Bei einem Experiment liegen **zwei gegensätzliche Hypothesen**, also Vermutungen über die Wahrscheinlichkeiten des Experimentes vor. Man weiß nicht, welche der Hypothesen wahr ist. Durch einen Test anhand eine **Stichprobe** versucht man eine der Hypothesen ausschließen zu können. Dazu muss eine Regel formuliert werden, wann welche Hypothese angenommen bzw. verworfen wird.

Vorgehen:

- Aus der Aufgabenstellung die gegensätzlichen Hypothesen incl. Wahrscheinlichkeiten ablesen. Diese werden **Nullhypothese H_0** und **Alternativhypothese H_1** genannt.
- Man gibt ein Signifikanzniveau vor, um sicherzustellen, dass das Ergebnis des Tests aussagekräftig ist. Übliche Werte sind 5% und 10%, bei großen Stichproben manchmal auch 1%
- Man formuliert eine Entscheidungsregel durch Angabe eines **Verwerfungsbereichs** und **Annahmebereichs** für die Stichprobe
- Aufgrund der Entscheidungsregel wird die Hypothese angenommen oder verworfen.

Übersicht über den Zusammenhang zwischen Test und entsprechenden Hypothesen:

Nullhypothese H_0: $p \geq p_0$, Alternativhypothese H_1: $p < p_0$ $\Rightarrow$ Linksseitiger Test

Nullhypothese H_0: $p \leq p_0$, Alternativhypothese H_1: $p > p_0$ $\Rightarrow$ Rechtsseitiger Test

Nullhypothese H_0: $p = p_0$, Alternativhypothese H_1: $p \neq p_0$ $\Rightarrow$ Beidseitiger Test

Linksseitiger Signifikanztest (=Signifikanzniveau ist angegeben)

Beispiel: Ein Medikament hat zu 30% Nebenwirkungen. Eine Neuentwicklung verspricht diesen Wert zu verbessern. An 40 Personen soll das neue Medikament getestet werden. Das Signifikanzniveau soll 5% betragen.

Nullhypothese H_0: Das neue Medikament hat keine Besserung bei den Nebenwirkungen, also $p = 0{,}3$

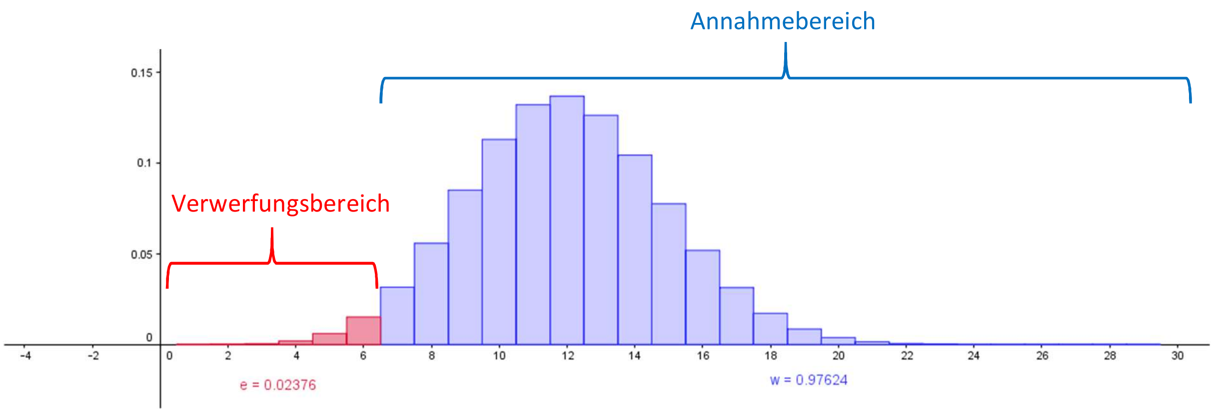
Alternativhypothese H_1: Das neue Medikament hat weniger Nebenwirkungen, also $p < 0{,}3$

Gesucht ist die Zahl der Treffer k, so dass $P(X \leq k) < \alpha$

Ein Blick in die Binomialverteilungstabelle für n = 40 (Stichprobengröße) und p = 0,3 ergibt

für k = 6: $\mathbf{P(X \leq 6) = 0{,}02376 < \alpha = 0{,}05}$

$\Rightarrow$ **Verwerfungsbereich V** = {0, 1, …, 6} und **Annahmebereich A** = {7, 8, …, 40}



<u>Rechtsseitiger Signifikanztest (=Signifikanzniveau ist angegeben)</u>

Beispiel: Eine Lotterie hatte bisher 30% Gewinnlose. Sie wirbt jetzt mit dem Slogan: „Jetzt mehr als 30% Gewinnlose". Es werden 40 Lose gekauft, um die Versprechung zu überprüfen. Das Signifikanzniveau soll 5% betragen.

Nullhypothese H_0: Das Lotterie hat weiterhin 30% Gewinnlose, also $p = 0{,}3$

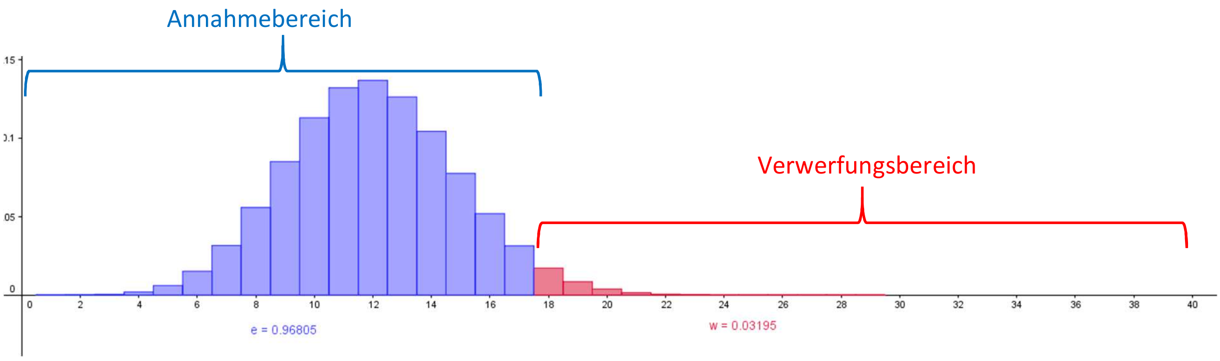
Alternativhypothese H_1: Es gibt jetzt mehr Gewinnlose, also $p > 0{,}3$

Gesucht ist die Zahl der Treffer k, so dass $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k\text{-}1) < \alpha$

Ein Blick in die Binomialverteilungstabelle für n = 40 (Stichprobengröße) und p = 0,3 ergibt

für k = 18: **$P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) = 0{,}03195 < \alpha = 0{,}05$**

$\Rightarrow$ **Verwerfungsbereich V** = {18, 19, ..., 40} und **Annahmebereich A** = {0, 1, ..., 17}



<u>Beidseitiger Signifikanztest (=Signifikanzniveau ist angegeben)</u>

Beispiel: Eine Lotterie wirbt mit 30% Gewinnlosen. Abweichungen hiervon sollen untersucht werden. Es werden 40 Lose gekauft, um die Versprechung zu überprüfen. Das Signifikanzniveau soll 5% betragen.

Hinweis: Beim zweiseitigen Test besteht der Ablehnungsbereich aus zwei Bereichen mit jeweils halbem Signifikanzniveau.

Nullhypothese H_0: Die Lotterie hat 30% Gewinnlose, also $p = 0{,}3$

Alternativhypothese H_1: Die Lotterie hat keine 30% Gewinnlose, also $p \neq 0{,}3$

Gesucht ist die Zahl der Treffer k_1, so dass $P(X \leq k_1) < \frac{\alpha}{2}$ und k_2, so dass $P(X \geq k_2) = 1 - P(X \leq k_2\text{-}1) < \frac{\alpha}{2}$

Ein Blick in die Binomialverteilungstabelle für n = 40 (Stichprobengröße) und p = 0,3 ergibt

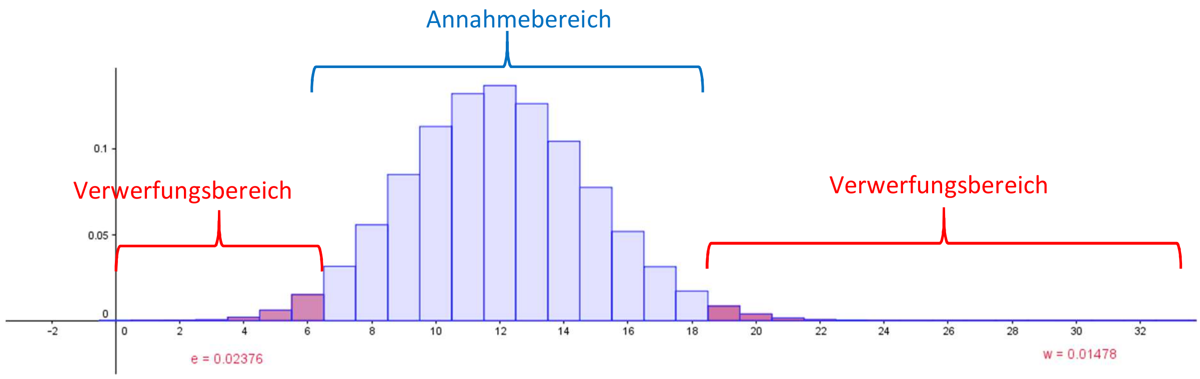
für $k_1 = 6$: **$P(X \leq 6) = 0{,}02376 < \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$**

$\Rightarrow$ **Verwerfungsbereich V_1** = {0, 1, ..., 6}

für $k_2 = 19$: **$P(X \geq 19) = 1 - P(X \leq 18) = 0{,}01478 < \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$**

$\Rightarrow$ **Verwerfungsbereich V_2** = {19, 20, ..., 40}

Verwerfungsbereich V = $V_1 \cup V_2$ = {0, 1, ..., 6, 19, 20, ..., 40} und **Annahmebereich A** = {7, 8, ..., 18}



Fehler beim Testen von Hypothesen

Nachdem man eine Stichprobe gezogen hat, ist man aufgrund der vorher festgelegten Entscheidungsregeln zu einem Ergebnis gekommen. Trotzdem kann das Ergebnis falsch sein, entweder, weil die angenommene Hypothese, z. B. die Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,3, von Anfang an falsch war und man aber zum Ergebnis gekommen ist, dass sie stimmt oder die Wahrscheinlichkeit war richtig, aber das wurde nicht erkannt.

	Nullhypothese H_0 ist wahr	**Nullhypothese H_0 ist falsch**
Versuchsergebnis im Annahmebereich	Entscheidung ist richtig	Entscheidung ist falsch **Fehler 2. Art (β-Fehler)**
Versuchsergebnis im Verwerfungsbereich	Entscheidung ist falsch **Fehler 1. Art (α-Fehler)**	Entscheidung ist richtig

Einen **Fehler 1. Art** bezeichnet man auch als α-Fehler. Die Hypothese ist wahr, aber man verwirft sie fälschlicherweise. Die **Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler entspricht dem Signifikanzniveau α.**
Einen **Fehler 2. Art** bezeichnet man auch als β-Fehler. Die Hypothese ist falsch, wurde aber irrtümlich nicht verworfen, weil das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt. Die Wahrscheinlichkeit für einen β-Fehler kann man nur berechnen, wenn die tatsächliche Erfolgswahrscheinlichkeit p_1 bekannt ist.

Alternativtest (Alternativhypothese hat eine bekannte Wahrscheinlichkeit, kein Signifikanzniveau)

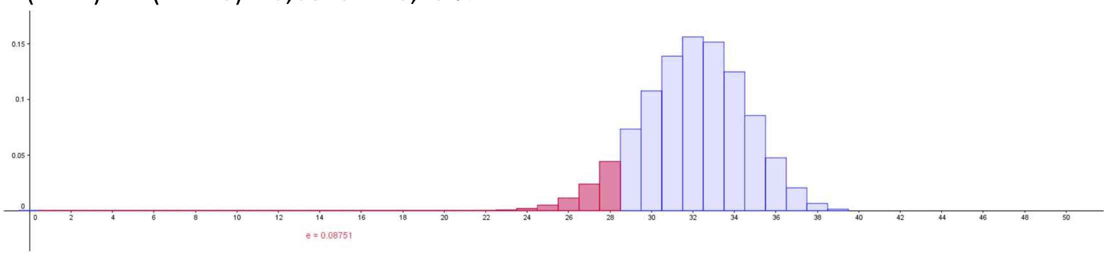
Beispiel: Bei Blumensorte 1 keimen 80% der Samen, während bei Sorte 2 nur 60% der Samen keinem. Es werden 40 Samen aus einer Kiste eingepflanzt, um zu überprüfen, um welche Sorte es sich handelt.

Nullhypothese H_0: Die Samen aus der Kiste sind Sorte 1, also $p_0 = 0{,}8$
Alternativhypothese H_1: Die Samen aus der Kiste sind Sorte 2, also $p_1 = 0{,}6$
Wähle sinnvoll eine kritische Zahl k, ab der man die Nullhypothese verwirft und sich für die Alternativhypothese entscheidet. Betrachte dazu die Erwartungswerte:
Bei Sorte 1 wären $E(X) = n \cdot p_1 = 40 \cdot 0{,}8 = 32$ Blumen zu erwarten
Bei Sorte 2 wären $E(X) = n \cdot p_2 = 40 \cdot 0{,}6 = 24$ Blumen zu erwarten
Wähle für k z.B. die Mitte zwischen 24 und 32, also k = 28.

$\Rightarrow$ **Verwerfungsbereich V** = {0, 1, …, 28} und **Annahmebereich A** = {29, 30, …, 40}

In diesem Fall kann der Fehler 1. und 2. Art wie folgt berechnet werden:

Fehler 1. Art: hierbei ist $p = p_0$
$P(X \leq k) = P(X \leq 28) = 0{,}08751 = 8{,}75\ \%$



Fehler 2. Art: hierbei ist $p = p_1$
$P(X \geq k) = P(X \geq 29) = 1 - P(X \leq 28) = 0{,}07095 = 7{,}1\ \%$