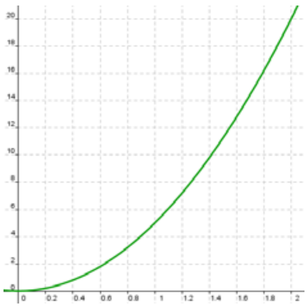
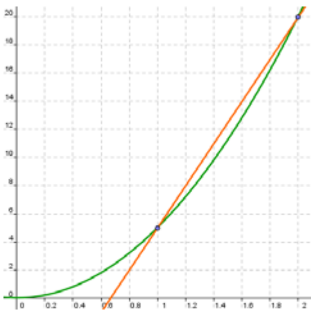
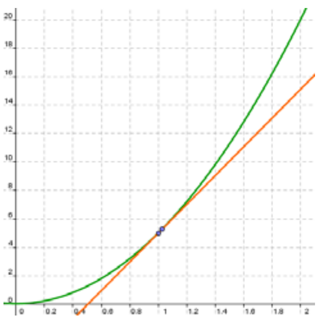
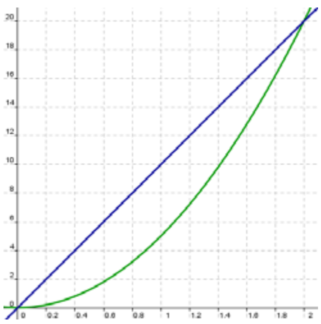
# Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit

| | **Mathematik** | **Physik** |
|---|---|---|
|  | Gegeben ist eine Funktion f(x) | Gegeben ist eine Funktion s(t), die die zum jeweiligen Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke s beschreibt. |
| *Beispiel:* | Gegeben:<br>$f(x) = 5\,x^2$ | Gegeben:<br>$s(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 5\,t^2$<br>(mit $a = 10\ m/s^2$) |
|  | Ist die Funktion f auf dem auf dem Intervall I [a;b] definiert, so berechnet sich die **mittlere Änderungsrate** aus dem **Differenzenquotient**<br>$m_{[a;b]} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ | Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** oder **mittlere Geschwindigkeit** zwischen zwei Zeitpunkten $t_1$ und $t_2$ errechnet sich aus der im Intervall gefahrenen Strecke geteilt durch die dafür benötigte Zeit.<br>$\bar{v}_{[t_1;t_2]} = \dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ |
| | Die **mittlere Änderungsrate** bzw. **Durchschnittsgeschwindigkeit** entspricht der **Steigung der Sekante** durch die entsprechenden Punkte. Die Berechnung entspricht der Berechnung mit Hilfe des **Steigungsdreiecks** ($m=\Delta y/\Delta x$ bzw. $v=\Delta s/\Delta t$). | |
| *Beispiel:*<br>Berechnung<br>**Steigung der Sekante** | Gesucht:<br>Mittlere Änderungsrate im Intervall I = [1;2]<br>$m_{[1;2]} = \dfrac{5\cdot 2^2 - 5\cdot 1^2}{2-1} = 15$ | Gesucht:<br>Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten 1s und 2s.<br>$v_{[1;2]} = \dfrac{5\cdot 2^2 - 5\cdot 1^2}{2-1} = 15$ |
|  | Wenn für die $x \to x_0$ die mittlere Geschwindigkeit $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gegen einen Wert $f\,'(x_0)$ strebt, so heißt $f\,'(x_0)$ die **momentane Änderungsrate** oder **Ableitung** an der Stelle $x_0$.<br><br>Existiert dieser Grenzwert, so heißt f an der Stelle $x_0$ **differenzierbar** oder ableitbar. | Wenn für die $t \to t_0$ die mittlere Geschwindigkeit $\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ gegen einen Wert $v(t_0)$ strebt, so heißt $v(t_0)$ die **momentane Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt $t_0$. |

| | | |
|---|---|---|
| | Die **momentane Änderungsrate** bzw. **Momentangeschwindigkeit** entspricht der **Steigung der Tangente** im entsprechenden Punkt. Die Berechnung erfolgt als **Grenzwert** der Sekantensteigung für immer kleinere Intervalle. | |
| *Beispiel:*<br>Berechnung<br>**Steigung der Tangente**<br><br>Vereinfachung des Differenzenquotienten ggf. mit Hilfe einer **Polynomdivision**! | Gesucht:<br>Momentane Änderungsrate an der Stelle $x_0=1$.<br><br>$f'(2) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{5 \cdot x^2 - 5 \cdot 1^2}{x-1}$<br>$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{5 \cdot (x+1)(x-1)}{x-1}$<br>$= \lim\limits_{x \to x_0} 5 \cdot (x+1) = 10$ | Gesucht:<br>Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0=1$s.<br><br>$v(2) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{5 \cdot t^2 - 5 \cdot 1^2}{t-1}$<br>$= \lim\limits_{t \to t_0} \frac{5 \cdot (t+1)(t-1)}{t-1}$<br>$= \lim\limits_{t \to t_0} 5 \cdot (t+1) = 10$ |
| | Ist eine Funktion f für alle $x_0 \in I$ differenzierbar, do nennt man f eine auf I **differenzierbare Funktion**. | |
|  | Es ist möglich, die momentane Änderungsrate bzw. Ableitung f '(x) allgemein als Funktion anzugeben.<br><br>Hierfür berechnet man mit der **h-Methode** den folgenden Grenzwert an der Stelle x:<br><br>$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ | Es ist möglich, die Momentan-geschwindigkeit v(t) bzw. $\dot{s}(t)$ allgemein als Funktion anzugeben.<br><br>Hierfür berechnet man mit **der h-Methode** den folgenden Grenzwert zum Zeitpunkt t:<br><br>$v(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ |
| | Sei f eine Funktion mit der Definitionsmenge $D_f$. Ist f für alle $x \in D_f$ differenzierbar, so heißt die Funktion $f': x \to f'(x)$ die **Ableitungsfunktion** oder **Ableitung** von f | |
| *Beispiel:*<br>Berechnung<br>**Steigung der Tangente als Funktion** | Gesucht:<br>Momentane Änderungsrate bzw. Ableitung für $f(x) = 5x^2$<br><br>$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$<br>$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5(x+h)^2 - 5x^2}{h}$<br>$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 5x^2}{h}$<br>$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{10xh + 5h^2}{h}$<br>$= \lim\limits_{h \to 0} 10x + 5h$<br>$= 10x$ | Gesucht:<br>Momentangeschwindigkeit für $s(t) = \frac{1}{2} at^2$<br><br>$v(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$<br>$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} a(t+h)^2 - \frac{1}{2} at^2}{h}$<br>$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} at^2 + ath + \frac{1}{2} ah^2 - \frac{1}{2} at^2}{h}$<br>$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{ath + \frac{1}{2} ah^2}{h}$<br>$= \lim\limits_{h \to 0} at + \frac{1}{2} ah$<br>$= a \cdot t$ |
| *Beispiel:*<br>Ergebnis | **Für $f(x) = 5x^2$ gilt:**<br>$f(x) = 5x^2$<br>$f'(x) = 10x$ | **Für $s(t) = \frac{1}{2} at^2$ gilt:**<br>$s(t) = \frac{1}{2} at^2$<br>$v(t) = at$ |