Binomialverteilung

Bei vielen Zufallsexperimenten interessiert man sich nur dafür, ob ein Ereignis A eintritt oder ob es nicht eintritt.

Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es nur darum geht, ob ein Ereignis A eingetreten ist oder nicht.
Das Eintreten von A bezeichnet man als **Treffer** T bzw. **Erfolg**.
Das Eintreten von $\overline{A}$ bezeichnet man als **Niete** N bzw. **Misserfolg**.

Jedes beliebige Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Experiment angesehen werden, wenn man bei der Ausführung nur fragt, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt oder nicht.

Beispiele:

1. Werfen einer Münze:	Ω = { Kopf, Zahl } p = 1/2
2. Würfeln:	Ω = { Sechs, keine Sechs } p = 1/6
3. Ziehen aus einer Urne:	Ω = { rot, nicht rot } p = (Anz. rot) / Gesamtanz.
4. Überprüfen eines Bauteil:	Ω = { defekt, nicht defekt } p = ...

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer mit p, also P(A)=p, so gilt:

$$P(\overline{A}) = 1-p \qquad , \text{ da } A \cup \overline{A} = \Omega$$

Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal durchgeführt und sind die einzelnen Experimente dabei unabhängig voneinander, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette**. n heißt dabei die **Länge** der Bernoulli-Kette.

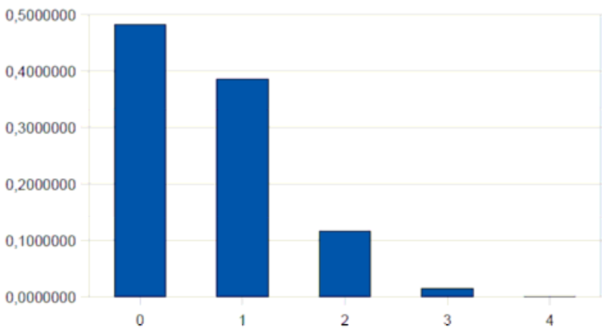
Bernoulli-Formel:
Für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A mit Trefferwahrscheinlichkeit p in der Bernoulli-Kette der Länge n genau k-mal auftritt, gilt:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiel:
Es wird mit einem Würfel viermal gewürfelt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei keine 6 fällt?

$$\Rightarrow n=4,\ k=0,\ p=1/6 \Rightarrow P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 48{,}23\%$$

Mit dieser Formel lassen sich nun die Wahrscheinlichkeiten berechnen, mit denen beim viermaligen Würfeln genau 0, 1, 2, 3 oder 4 Sechsen auftreten.
P(X = 0) = 48,23 %
P(X = 1) = 38,58 %
P(X = 2) = 11,57 %
P(X = 3) = 1,54 %
P(X = 4) = 0,08 %
In Summe sind das natürlich 100%.

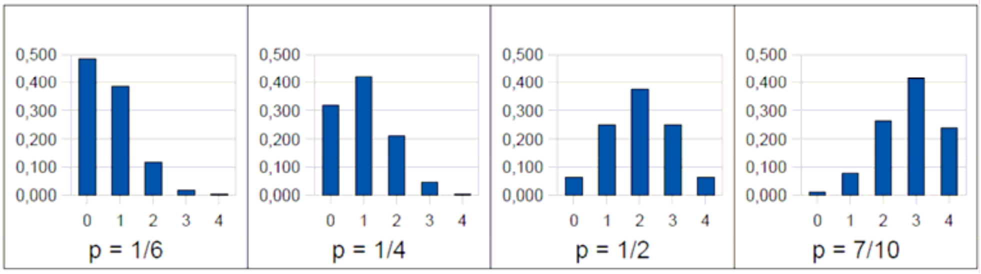


Binomialverteilung $B_{4;1/6}(k)$

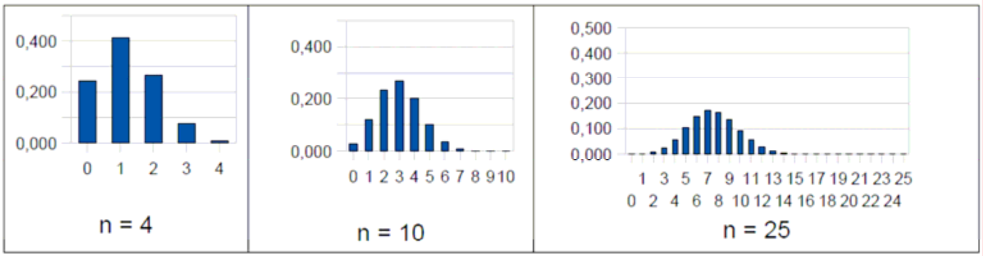
Ist *X* die Trefferanzahl bei einer Bernoulli-Kette, dann nennt man die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung von *X* eine ***Binomialverteilung*** mit den Parametern n (Anzahl der Ziehungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit).
Deshalb schreibt man für *P(X = k)* auch *B(n; p; k)* oder $B_{n;p}(k)$.

Eigenschaften der Binomialverteilung:

Bei festgelegter Ziehungsanzahl *n* und bei veränderlicher Trefferwahrscheinlichkeit *p* gilt:
1. Je größer *p*, desto weiter rechts (bei größeren *k*) liegt das Maximum der Verteilung
2. Für $p = 0{,}5$ ist die Verteilung symmetrisch
3. Es gilt die Symmetriebeziehung $B(n;\, p;\, k) = B(n;\, 1\text{-}p;\, n\text{-}k)$



Bei gleichbleibender Trefferwahrscheinlichkeit *p* und veränderlicher Anzahl *n* gilt:
1. Mit wachsendem *n* werden die Verteilungen flacher
2. Mit wachsendem *n* werden die Verteilungen symmetrischer.



Arbeiten mit Tabellen

Für manche Aufgaben ("Mindestens-" und "Höchstens"-Aufgaben) werden sogenannte **kumulierte Wahrscheinlichkeiten P(X ≤ k)** berechnet. In ihr sind alle Einzel-Wahrscheinlichkeiten von X = 0 bis zum Wert X = k aufsummiert:

$$P(X \le k) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=k)$$

Es gibt Tabellen, in denen diese kumulierte Wahrscheinlichkeit ("**Summenverteilung**") und auch die Wahrscheinlichkeiten der normalen Binomialverteilung aufgelistet sind.

Einfache Wahrscheinlichkeit P(X=k):

Beispiel: $P_{3;0,4}(X=2) = 0{,}2880$

n	*k*		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		*n*
2	0	0,	9604	9409	9025	8100	6944	6400	5625	4900	4444	3600	2500	2	2
	1		0392	0582	0950	1800	2778	3200	3750	4200	4444	4800	5000	1	
	2		0004	0009	0025	0100	0278	0400	0625	0900	1111	1600	2500	0	
3	0	0,	9412	9127	8574	7290	5787	5120	4219	3430	2963	2160	1250	3	3
	1		0576	0847	1354	2430	3472	3840	4219	4410	4444	4320	3750	2	
	2		0012	0026	0071	0270	0694	0960	1406	1890	2222	2880	3750	1	
	3				0001	0010	0046	0080	0156	0270	0370	0640	1250	0	
		p	0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	*k*	*n*

Kumulierte Wahrscheinlichkeit P(X≤ k):

Beispiel: $P_{3;0,4}(X\le 2) = 0{,}9360$

n	*k*		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		*n*
2	0	0,	9604	9409	9025	8100	6944	6400	5625	4900	4444	3600	2500	1	2
	1		9996	9991	9975	9900	9722	9600	9375	9100	8889	8400	7500	0	
3	0	0,	9412	9127	8574	7290	5787	5120	4219	3430	2963	2160	1250	2	3
	1		9988	9974	9928	9720	9259	8960	8438	7840	7407	6480	5000	1	
	2				9999	9990	9954	9920	9844	9730	9630	9360	8750	0	
		p	0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	*k*	*n*

Bei grau unterlegten Werten, d.h. p>1/2, gilt: P (X ≤ k) = 1− abgelesener Wert.

Es gilt:

$$P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$$
$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a-1)$$