

Kugeln

Eine Kugel mit dem **Mittelpunkt M** ($m_1 | m_2 | m_3$) und dem **Radius r** wird durch die

Vektorgleichung: $[\vec{x} - \vec{m}]^2 = r^2$

bzw. durch die

Koordinatengleichung $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

beschrieben.

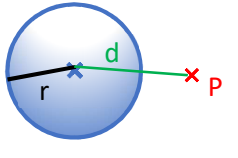
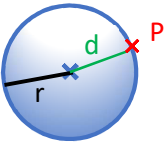
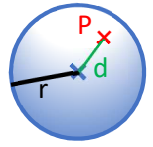
Lagebeziehungen von Kugeln

Kugel und Punkt

Sei eine Kugel K: $[\vec{x} - \vec{m}]^2 = r^2$ mit Mittelpunkt M und Radius r, sowie ein Punkt P gegeben.

Vorgehen:

- Bestimme die Länge $d = \overline{MP}$ und überprüfe mit Hilfe der folgenden Tabelle

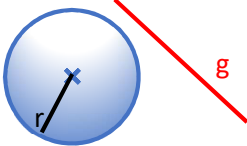
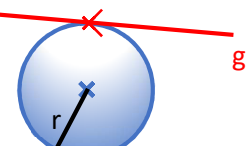
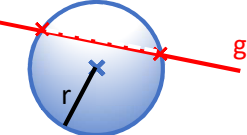
Lagebeziehung	Punkt liegt außerhalb von K	Punkt liegt auf K	Punkt liegt innerhalb von K
Skizze			
Überprüfung	$d > r$	$d = r$	$d < r$

Kugel und Gerade

Sei eine Kugel K: $[\vec{x} - \vec{m}]^2 = r^2$ mit Mittelpunkt M und Radius r, sowie eine Gerade g: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ gegeben.

Vorgehen:

- Setze die Gerade in die Kugelgleichung ein: $[\vec{p} + t \cdot \vec{u} - \vec{m}]^2 = r^2$
- Löse die quadratische Gleichung und überprüfe mit Hilfe der folgenden Tabelle
- Die Lösung für t in die Geradengleichung einsetzen und Schnittpunkt(e) ermitteln

Lagebeziehung	Gerade läuft außerhalb von K	Gerade berührt K	Gerade schneidet K
Skizze			
Überprüfung	Die Gleichung hat keine Lösung.	Die Gleichung hat eine Lösung.	Die Gleichung hat zwei Lösungen.

Kugel und Ebene

Sei eine Kugel $K: [\vec{x} - \vec{m}]^2 = r^2$ mit Mittelpunkt M und Radius r , sowie eine Ebene E
 $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ gegeben.

Vorgehen:

- Bestimme den Abstand d des Kugel-Mittelpunktes von der Ebene und überprüfe mit Hilfe der folgenden Tabelle

Lagebeziehung	Ebene hat keinen gem. Punkt mit K	Ebene berührt K	Ebene schneidet K
Skizze			
Überprüfung	$d > r$	$d = r$	$d < r$
Im Falle eines Schnittes ergibt sich ein Schnittkreis. Hier gilt:			
<ul style="list-style-type: none"> - Mittelpunkt $M' = \text{Lotfußpunkt } L$ (von M auf E) - Radius $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$ 			

Kugel und Kugel

Seien zwei Kugeln $K_1: [\vec{x} - \vec{m}_1]^2 = r_1^2$ mit Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 und
 $K_2: [\vec{x} - \vec{m}_2]^2 = r_2^2$ mit Mittelpunkt M_2 und Radius r_2 gegeben.

Vorgehen:

- Bestimme den Abstand der beiden Mittelpunkte $d = \overline{M_1 M_2}$
- Überprüfe mit Hilfe der folgenden Tabellen

Lagebeziehung	auseinander	außen berührend	schneidend
Skizze			
Überprüfung	$d > r_1 + r_2$	$d = r_1 + r_2$	$d < r_1 + r_2$ und $d > r_1 - r_2 $

Lagebeziehung	innen berührend	ineinander	konzentrisch
Skizze			
Überprüfung	$d = r_1 - r_2 $	$d < r_1 - r_2 $	$d = 0$