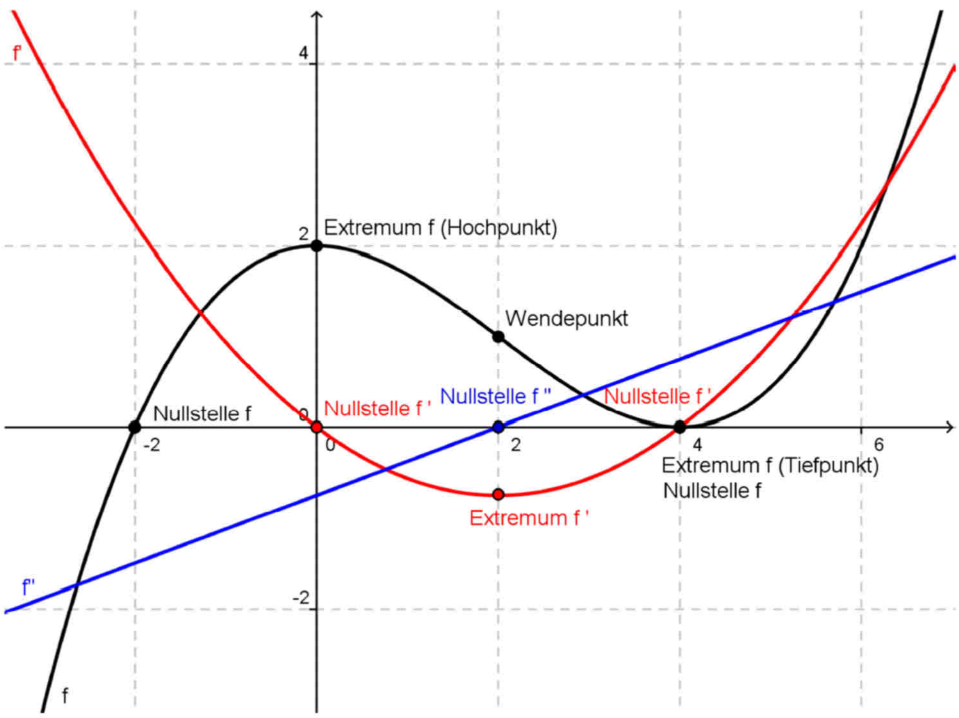
Zusammenhänge bei der Kurvendiskussion

	Extremstelle	Wendestelle
Notwendiges Kriterium	**$f'(x) = 0$**	**$f''(x) = 0$**
2. Hinreichendes Kriterium	$f''(x_0) \neq 0$	$f'''(x_0) \neq 0$
1. Hinreichendes Kriterium (Wenn 2. hinreichendes Kriterium nicht erfüllt ist)	bei $f''(x_0) = 0$: Vorzeichenwechsel bei **$f'(x_0)$** untersuchen $- \rightarrow +$: Tiefpunkt $+ \rightarrow -$: Hochpunkt	bei $f'''(x_0) = 0$: Vorzeichenwechsel bei **$f''(x_0)$** untersuchen $- \rightarrow +$: Wendep. rechts/links $+ \rightarrow -$: Wendep. links/rechts

Graph ist/hat …	**Werte über/ unter x-Achse**	**Steigungsverhalten**	**Krümmungs-verhalten**	
	f(x)	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**
negativ	< 0			
Nullstelle	**= 0**			
positiv	> 0			
monoton fallend		< 0		
Extremstelle		**= 0**	**$\neq$ 0**	
Extremstelle: Hochpunkt		**= 0**	**< 0**	
Extremstelle: Tiefpunkt		**= 0**	**> 0**	
monoton steigend		> 0		
Rechtskurve		monoton fallend	< 0	
Wendestelle		**Extremstelle**	**= 0**	**$\neq$ 0**
Wendestelle: links - rechts		Extremstelle: Hochpunkt	= 0	< 0
Wendestelle: rechts - links		Extremstelle: Tiefpunkt	= 0	> 0
Linkskurve		monoton steigend	> 0	



Extrem- und Wendepunkte

Beispiel

$f(x) = x^5 - x^4$

$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 = x^3 (5x - 4)$

$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 = 4x^2 (5x - 3)$

$f'''(x) = 60x^2 - 24x = 12x (5x - 2)$

Extrempunkte	Wendepunkte

Man kann nicht alle x-Werte überprüfen, ob sie Extrem- oder Wendestelle sind. Man braucht ein **Kriterium**, um diese Zahl deutlich zu reduzieren. Dann werden nur noch alle x-Werte als Kandidaten betrachtet, die das notwendige Kriterium erfüllen.

Notwendiges Kriterium:

$f'(x) = 0$	$f''(x) = 0$
$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 = 0$	$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 = 0$
$x^3 (5x - 4) = 0$	$4x^2 (5x - 3) = 0$
Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,8$	**Kandidaten: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,6$**

Jetzt hat man ein paar Kandidaten x_i, die diese Voraussetzung erfüllen. Können wir sicher sein, dass es sich um eine Extrem- bzw. Wendestelle handelt? Nein. Man muss die Kandidaten noch genauer untersuchen – mit dem 2. hinreichenden Kriterium:

2. Hinreichendes Kriterium:

$f''(x_0) \neq 0$	$f'''(x_0) \neq 0$
Kandidat 1: $f''(x_1) = 20 \cdot 0^3 - 12 \cdot 0^2 = 0$	Kandidat 1: $f'''(x_1) = 60 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow$ **keine Aussage**	$\Rightarrow$ **keine Aussage**
Kandidat 2: $f''(x_2) = 20 \cdot 0,8^3 - 12 \cdot 0,8^2 > 0$	Kandidat 2: $f'''(x_2) = 60 \cdot 0,6^2 - 24 \cdot 0,6 \neq 0$
$\Rightarrow$ **Extremstelle (Tiefpunkt) bei $x_2 = 0,8$**	$\Rightarrow$ **Wendestelle bei $x_2 = 0,6$**

Erfüllen die Kandidaten auch das hinreichende Kriterium ist die Untersuchung abgeschlossen. Man hat eine Extrem- bzw. Wendestelle gefunden.

Ist das 2. hinreichende Kriterium nicht erfüllt, kann man keine Aussage treffen und muss es umständlicher mit dem 1. hinreichenden Kriterium versuchen.

1. Hinreichendes Kriterium:

Vorzeichenwechsel bei $f'(x_0)$

$f'(x) = 5x^4 - 4x^3 = x^3 (5x - 4)$

Stelle	x^3	5x-4	f'(x)
< 0	-	-	+
0	0	-	0
> 0	+	-	-

Vorzeichenwechsel von + auf –

$\Rightarrow$ **Extremstelle (Hochpunkt)**

Vorzeichenwechsel bei $f''(x_0)$

$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 = 4x^2 (5x - 3)$

Stelle	$4x^2$	5x-3	f''(x)
< 0	+	-	-
0	0	-	0
> 0	+	-	-

kein Vorzeichenwechsel

$\Rightarrow$ **keine Wendestelle**

Erfüllt der Kandidat das 1. hinreichende Kriterium, so handelt es sich um eine Extrem- bzw. Wendestelle. Wenn nicht, dann ist es auch keine Extrem- bzw. Wendestelle.

Hat man die Extrem- bzw. Wendestelle gefunden, so braucht man noch den Funktionswert an der Stelle x_0, also $f(x_0)$, um auch den Extrem- bzw. Wende**punkt** angeben zu können.

Extremum $(x_0 \mid f(x_0))$	Wendepunkt $(x_0 \mid f(x_0))$
$f(x_2) = f(0,8) = -0,08$	$f(x_2) = f(0,6) = -0,05$
$\Rightarrow$ **Tiefpunkt $(0,8 \mid -0,08)$**	$\Rightarrow$ **Wendepunkt $(0,6 \mid -0,05)$**
$f(x_1) = f(0) = 0$	
$\Rightarrow$ **Hochpunkt $(0 \mid 0)$**	