

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Ebene

Bestimme die Schnittgerade der sich schneidenden Ebenen

a) E1: $1 x_1 + 2 x_2 + 4 x_3 = 12$

$$E2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) E1: $1 x_1 - 1 x_2 + 4 x_3 = 18$

$$E2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) E1: $-1 x_1 + 1 x_2 + 2 x_3 = 8$

$$E2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Ebene

a) **3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:**

$$1 \cdot (2 - 2r - 4s) + 2 \cdot (1 - 8r - 4s) + 4 \cdot (1 + 5r + 4s) = 12$$

$$2 - 2r - 4s + 2 - 16r - 8s + 4 + 20r + 16s = 12$$

$$2 + 2 + 4 - 2r - 16r + 20r - 4s - 8s + 16s = 12$$

$$8 + 2r + 4s = 12$$

$$2r + 4s = 4$$

$$r = 2 - 2s$$

r in E2 einsetzen:

und nach "s" und "nicht s" trennen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (2 - 2s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} - 2s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b) **3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:**

$$1 \cdot (2 + 2r + 8s) - 1 \cdot (0 + 8r + 8s) + 4 \cdot (3 + 1r + 1s) = 18$$

$$2 + 2r + 8s + 0 - 8r - 8s + 12 + 4r + 4s = 18$$

$$2 + 0 + 12 + 2r - 8r + 4r + 8s - 8s + 4s = 18$$

$$14 - 2r + 4s = 18$$

$$-2r + 4s = 4$$

$$r = -2 + 2s$$

r in E2 einsetzen:

und nach "s" und "nicht s" trennen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2 + 2s) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + 2s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) **3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:**

$$-1 \cdot (2 - 1r - 2s) + 1 \cdot (2 - 2r + 4s) + 2 \cdot (3 + 0r - 2s) = 8$$

$$-2 + 1r + 2s + 2 - 2r + 4s + 6 + 0r - 4s = 8$$

$$-2 + 2 + 6 + 1r - 2r + 0r + 2s + 4s - 4s = 8$$

$$6 - 1r + 2s = 8$$

$$-1r + 2s = 2$$

$$r = -2 + 2s$$

r in E2 einsetzen:

und nach "s" und "nicht s" trennen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2 + 2s) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$