

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Gerade

Bestimme die Lagebeziehung und gib ggf. den Schnittpunkt an.

a) E: $-5 x_1 + 4 x_2 + 1 x_3 = -3$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -37 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$

b) E: $2 x_1 + 3 x_2 + 1 x_3 = -4$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) E: $-5 x_1 + 1 x_2 - 1 x_3 = 5$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$

d) E: $-5 x_1 + 1 x_2 - 1 x_3 = -1$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Gerade

a) g:
$$\begin{aligned} x_1 &= -3 - 2r \\ x_2 &= 4 - 1r \\ x_3 &= -37 - 7r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -5 \cdot (-3 - 2r) + 4 \cdot (4 - 1r) + 1 \cdot (-37 - 7r) &= -3 \\ 15 + 10r + 16 - 4r - 37 - 7r &= -3 \\ -6 - 1r &= -3 && | +6 \\ -1r &= 3 && | :(-1) \\ r &= -3 \end{aligned}$$

Schnittpunkt bestimmen:

$$OS = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -37 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}$$

=> S (3|7|-16)

b) g:
$$\begin{aligned} x_1 &= -4 + 5r \\ x_2 &= 0 - 3r \\ x_3 &= 4 - 1r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-4 + 5r) + 3 \cdot (0 - 3r) + 1 \cdot (4 - 1r) &= -4 \\ -8 + 10r + 0 - 9r + 4 - 1r &= -4 \\ -4 + 0r &= -4 && | +4 \\ 0r &= 0 \\ \text{allgemeingültig} &\Rightarrow \text{g liegt in E} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

c) g:
$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 2r \\ x_2 &= -3 - 2r \\ x_3 &= -6 - 12r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -5 \cdot (-2 + 2r) + 1 \cdot (-3 - 2r) - 1 \cdot (-6 - 12r) &= 5 \\ 10 - 10r - 3 - 2r + 6 + 12r &= 5 \\ 13 + 0r &= 5 && | -13 \\ 0r &= -8 \\ \text{nicht lösbar} &\Rightarrow \text{g parallel zu E} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

d) g:
$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - 3r \\ x_2 &= 2 + 2r \\ x_3 &= 19 + 12r \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -5 \cdot (5 - 3r) + 1 \cdot (2 + 2r) - 1 \cdot (19 + 12r) &= -1 \\ -25 + 15r + 2 + 2r - 19 - 12r &= -1 \\ -42 + 5r &= -1 && | +42 \\ 5r &= 41 && | :5 \\ r &= 8,2 \end{aligned}$$

Schnittpunkt bestimmen:

$$OS = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + 8,2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 18 \\ 117 \end{pmatrix}$$

=> S (-19,6|18,4|117,4)