

Lernkontrolle Ebenenformen

DX-CO-WT

Aufgabe 1: Gegeben sind die folgenden drei Punkte.

$$P(-1 | 2 | -5) \quad Q(1 | 1 | -1) \quad R(-1 | -4 | -3)$$

- Gib eine Ebene in Parameterform durch diese drei Punkte an.
- Gib eine weitere Parameterform derselben Ebene an.
- Gib die Ebene in Normalenform an.
- Gib die Ebene in Koordinatenform an.

Aufgabe 2: Gegeben ist eine Ebene in Normalenform

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

- Gib die Ebene in Koordinatenform an.
- Gib die Ebene in Parameterform an.

Aufgabe 3: Gegeben ist eine Ebene in Koordinatenform

$$E: -3 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 = -15$$

- Gib die Ebene in Normalenform an.
- Gib die Ebene in Parameterform an.

Lösungen:

DX-CO-WT

Aufgabe 1: Gegeben sind die folgenden drei Punkte.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ OP als Stützvektor wählen
PQ und PR als Spannvektoren wählen

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ OQ als Stützvektor wählen
Vielfache der alten Spannvektoren wählen
z.B. $2 \cdot PQ$ oder $(-1) \cdot PR$

c) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$ E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} = 0$ Stützvektor übernehmen
Normalenvektor =
Kreuzprodukt der
Spannvektoren

d) $22 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 - 12 \cdot x_3 = 30$ durch Ausmultiplizieren

Aufgabe 2: Gegeben ist eine Ebene in Normalenform

a) E: $-2 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = -40$ durch Ausmultiplizieren

b) $x_1 = 20 + 5 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3$
 $x_2 = 0 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$
 $x_3 = 0 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$ Koordinatenform auflösen
z.B. nach x_1

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Gegeben ist eine Ebene in Koordinatenform

a) E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$ \vec{n} ablesen
Punkt auf E wählen, z.B. $P(0 | 0 | -1)$

b) $x_1 = 5 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3$
 $x_2 = 0 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$
 $x_3 = 0 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$ Koordinatenform auflösen
z.B. nach x_1

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$