

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Ebene

Bestimme die Schnittgerade der sich schneidenden Ebenen

a) E1: $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2$

$$E2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 6,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) E1: $1x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 14$

$$E2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) E1: $-1x_1 - 2x_2 + 1x_3 = 3$

$$E2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ein Erklärvideo dazu findest du unter dem folgenden Link.



Lösungen:

Aufgabe 1: Lagebeziehung von Ebene und Ebene

a) 3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:

$$2 \cdot (-1 - 4r - 4s) + 2 \cdot (3 - 8r + 8s) + 4 \cdot (-2 + 6,5r - 1s) = -2$$

$$-2 - 8r - 8s + 6 - 16r + 16s - 8 + 26r - 4s = -2$$

$$-2 + 6 - 8 - 8r - 16r + 26r - 8s + 16s - 4s = -2$$

$$-4 + 2r + 4s = -2$$

$$2r + 4s = 2$$

$$r = 1 - 2s$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + (1 - 2s) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 6,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

r in E2 einsetzen:

und nach "s" und "nicht s" trennen

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 6,5 \end{pmatrix} - 2s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 6,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 4,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ -14 \end{pmatrix}$$

b) 3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:

$$1 \cdot (-2 + 2r - 8s) + 1 \cdot (2 - 4r + 4s) + 4 \cdot (3 + 0r + 2s) = 14$$

$$-2 + 2r - 8s + 2 - 4r + 4s + 12 + 0r + 8s = 14$$

$$-2 + 2 + 12 + 2r - 4r + 0r - 8s + 4s + 8s = 14$$

$$12 - 2r + 4s = 14$$

$$-2r + 4s = 2$$

$$r = -1 + 2s$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1 + 2s) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

r in E2 einsetzen:

und nach "s" und "nicht s" trennen

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) 3 Gleichungen aus E2 in E1 einsetzen:

$$-1 \cdot (3 - 2r - 2s) - 2 \cdot (-3 - 2r + 2s) + 1 \cdot (-2 - 7r + 3s) = 3$$

$$-3 + 2r + 2s + 6 + 4r - 4s - 2 - 7r + 3s = 3$$

$$-3 + 6 - 2 + 2r + 4r - 7r + 2s - 4s + 3s = 3$$

$$1 - 1r + 1s = 3$$

$$-1r + 1s = 2$$

$$r = -2 + 1s$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + (-2 + 1s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

r in E2 einsetzen:

und nach "s" und "nicht s" trennen

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + 1s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$