Lernkontrolle: Abstand Punkt - Ebene (Lotfußpunktverfahren)

Aufgabe:

Bestimme den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

a)

E: $6 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 33$

P: (-23 | 22 | -4)

b)

E: $4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 = -30$

P: (23 | 3 | -35)

c)

E: $-4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = -14$

P: (-4 | 0 | -3)

Ein Erklärvideo findest du unter dem folgenden Link:

Lösungen:

a) Lotgerade aufstellen.

Stützvektor = Ortsvektor von P, Richtungsvektor = Normalenvektor von E

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -23 \\ 22 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in E:

$6 \cdot (-23 + 6r) - 3 \cdot (22 - 3r) + 2 \cdot (-4 + 2r) = 33$

$-138 + 36r - 66 + 9r - 8 + 4r = 33$

$-212 + 49r = 33$

$49r = 245$

$r = 5$

Schnittpunkt bestimmen:

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} -23 \\ 22 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow L = (7 \mid 7 \mid 6) \rightarrow \vec{PL} = \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$d = |\vec{PL}| = \sqrt{30^2 + (-15)^2 + 10^2} = \sqrt{1225} = 35$

b) Lotgerade aufstellen.

Stützvektor = Ortsvektor von P, Richtungsvektor = Normalenvektor von E

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 23 \\ 3 \\ -35 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in E:

$4 \cdot (23 + 4r) + 1 \cdot (3 + 1r) - 8 \cdot (-35 - 8r) = -30$

$92 + 16r + 3 + 1r + 280 + 64r = -30$

$375 + 81r = -30$

$81r = -405$

$r = -5$

Schnittpunkt bestimmen:

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} 23 \\ 3 \\ -35 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow L = (3 \mid -2 \mid 5) \rightarrow \vec{PL} = \begin{pmatrix} -20 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$d = |\vec{PL}| = \sqrt{(-20)^2 + (-5)^2 + 40^2} = \sqrt{2025} = 45$

c) Lotgerade aufstellen.

Stützvektor = Ortsvektor von P, Richtungsvektor = Normalenvektor von E

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in E:

$-4 \cdot (-4 - 4r) + 4 \cdot (0 + 4r) - 2 \cdot (-3 - 2r) = -14$

$16 + 16r + 0 + 16r + 6 + 4r = -14$

$22 + 36r = -14$

$36r = -36$

$r = -1$

Schnittpunkt bestimmen:

$$\vec{OL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow L = (0 \mid -4 \mid -1) \rightarrow \vec{PL} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$d = |\vec{PL}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$