Kursarbeitstrainer Schnittpunkt Kugel und Gerade

Aufgabe:
Bestimme den Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte P und Q mit dem Kreis K.

a) $P = (37|31|6)$ $\quad$ $Q = (24|30|18)$

Kugel K: $(x - 0)^2 + (y - 39)^2 + (z - 32)^2 = 15^2$

b) $P = (22|13|27)$ $\quad$ $Q = (14|19|21)$

Kugel K: $(x - 2)^2 + (y - 27)^2 + (z - 11)^2 = 6^2$

c) $P = (87|28|-33)$ $\quad$ $Q = (55|16|-13)$

Kugel K: $(x - 11)^2 + (y - 10)^2 + (z - 11)^2 = 14^2$

d) $P = (-16|-23|81)$ $\quad$ $Q = (4|-11|49)$

Kugel K: $M\ (30|13|13)$, $r = 14$

Erklärvideo

Lösung:

Aufgabe:

a) Geradengleichung aufstellen: $\vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{PQ}$

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 37 \\ 31 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Gerade in Kugelgleichung einsetzen:

$(37 - 13r - 0)^2 + (31 - 1r - 39)^2 + (6 + 12r - 32)^2 = 15^2$

$(37 - 13r)^2 + (-8 - 1r)^2 + (-26 + 12r)^2 = 15^2$

$1369 - 962r + 169r^2 + 64 + 16r + 1r^2 + 676 - 624r + 144r^2 = 15^2$

$2109 - 1570r + 314r^2 = 15^2$

$1884 - 1570r + 314r^2 = 0$

$6 - 5r + r^2 = 0$

PQ-Formel ergibt: $r1 = 2$ und $r2 = 3$

Einsetzen in die Geradengleichung ergeben sich die Schnittpunkte

S1 (11|29|30) und S2 (-2|28|42)

b) Geradengleichung aufstellen: $\vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{PQ}$

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 22 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Gerade in Kugelgleichung einsetzen:

$(22 - 8r - 2)^2 + (13 + 6r - 27)^2 + (27 - 6r - 11)^2 = 6^2$

$(20 - 8r)^2 + (-14 + 6r)^2 + (16 - 6r)^2 = 6^2$

$400 - 320r + 64r^2 + 196 - 168r + 36r^2 + 256 - 192r + 36r^2 = 6^2$

$852 - 680r + 136r^2 = 6^2$

$816 - 680r + 136r^2 = 0$

$6 - 5r + r^2 = 0$

PQ-Formel ergibt: $r1 = 2$ und $r2 = 3$

Einsetzen in die Geradengleichung ergeben sich die Schnittpunkte

S1 (6|25|15) und S2 (-2|31|9)

c) Geradengleichung aufstellen: $\vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{PQ}$

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 87 \\ 28 \\ -33 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -32 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Gerade in Kugelgleichung einsetzen:

$(87 - 32r - 11)^2 + (28 - 12r - 10)^2 + (-33 + 20r - 11)^2 = 14^2$

$(76 - 32r)^2 + (18 - 12r)^2 + (-44 + 20r)^2 = 14^2$

$5776 - 4864r + 1024r^2 + 324 - 432r + 144r^2 + 1936 - 1760r + 400r^2 = 14^2$

$8036 - 7056r + 1568r^2 = 14^2$

$7840 - 7056r + 1568r^2 = 0$

$5 - 4{,}5r + r^2 = 0$

PQ-Formel ergibt: $r1 = 2$ und $r2 = 2{,}5$

Einsetzen in die Geradengleichung ergeben sich die Schnittpunkte

S1 (23|4|7) und S2 (7|-2|17)

d) Geradengleichung aufstellen: $\vec{x} = \vec{OP} + r \cdot \vec{PQ}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ -23 \\ 81 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ -32 \end{pmatrix}$$

Gerade in Kugelgleichung einsetzen:

$(-16 + 20r - 30)^2 + (-23 + 12r - 13)^2 + (81 - 32r - 13)^2 = 14^2$

$(-46 + 20r)^2 + (-36 + 12r)^2 + (68 - 32r)^2 = 14^2$

$2116 - 1840r + 400r^2 + 1296 - 864r + 144r^2 + 4624 - 4352r + 1024r^2 = 14^2$

$8036 - 7056r + 1568r^2 = 14^2$

$7840 - 7056r + 1568r^2 = 0$

$5 - 4{,}5r + r^2 = 0$

PQ-Formel ergibt: $r1 = 2$ und $r2 = 2{,}5$

Einsetzen in die Geradengleichung ergeben sich die Schnittpunkte

S1 (24|1|17) und S2 (34|7|1)