

### Aufgabe 1: Koordinatengleichung einer Kugel

- a) Gib eine Gleichung für eine Kugel mit Mittelpunkt  $(3|3|3)$  und dem Radius 5 an.  
b) Gib eine Gleichung für eine Kugel mit Mittelpunkt  $(-3|5|-1)$  und dem Radius 6 an.

### Aufgabe 2: Mittelpunkt und Radius bestimmen

Bestimme den Mittelpunkt und Radius der folgenden Kugel:

a)  $x^2 - 10x + y^2 + 10y + z^2 - 6z = -50$

b)  $x^2 + 10x + y^2 + 2y + z^2 + 4z = -21$

### Aufgabe 3: Punktprobe

Überprüfe, ob die Punkte A, B und C auf der Kugel, außerhalb der Kugel oder innerhalb der Kugel mit Mittelpunkt  $(-3|-4|-2)$  und mit Radius 3 liegen.

A  $(6|4|10)$

B  $(0|2|0)$

C  $(1|0|0)$

### Aufgabe 4: Lagebeziehung von Kugel und Kugel

Bestimme die Lagebeziehung der beiden Kugeln.

Kugel 1:  $(x - 7)^2 + (y - 9)^2 + (z - 7)^2 = 16^2$

Kugel 2:  $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 + (z + 5)^2 = 14^2$

### Aufgabe 5: Lagebeziehung von Kugel und Ebene

Zeige, dass sich Ebene und Kugel schneiden. Berechne den Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises.

Kugel:  $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 7)^2 = 39^2$

Ebene:  $0x + 4y + 3z = 120$

Erklärvideo



Erklärvideo



Erklärvideo



**Lösung:**

**Aufgabe 1:**

a)  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 5^2$       b)  $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = 6^2$

**Aufgabe 2: Quadratische Ergänzung**

a)  $x^2 - 10x + 25 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 6z + 9 = -50 + 25 + 25 + 9$   
 $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = 9 = 3^2$   
 $\Rightarrow$  Mittelpunkt (5 | -5 | 3) und Radius = 3

b)  $x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4 = -21 + 25 + 1 + 4$   
 $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 9 = 3^2$   
 $\Rightarrow$  Mittelpunkt (-5 | -1 | -2) und Radius = 3

**Aufgabe 3:**

**Kugel:**  $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 9 = 3^2$

**Punkt A:**  $(6 + 3)^2 + (4 + 4)^2 + (10 + 2)^2 = 9^2 + 8^2 + 12^2 = 81 + 64 + 144 = 289 = 17^2$   
 $17 > 3 \Rightarrow$  Punkt liegt außerhalb der Kugel

**Punkt B:**  $(0 + 3)^2 + (2 + 4)^2 + (0 + 2)^2 = 3^2 + 6^2 + 2^2 = 9 + 36 + 4 = 49 = 7^2$   
 $7 > 3 \Rightarrow$  Punkt liegt außerhalb der Kugel

**Punkt C:**  $(1 + 3)^2 + (0 + 4)^2 + (0 + 2)^2 = 4^2 + 4^2 + 2^2 = 16 + 16 + 4 = 36 = 6^2$   
 $6 > 3 \Rightarrow$  Punkt liegt außerhalb der Kugel

**Aufgabe 4:**

$r_1 + r_2 = 16 + 14 = 30$        $|r_1 - r_2| = |16 - 14| = |2| = 2$   
 $d = \sqrt{1^2 + 12^2 + 12^2} = \sqrt{289} = 17$   
 $d < r_1 + r_2$  und  $d > |r_1 - r_2|$        $\Rightarrow$  schneidend

**Aufgabe 5:**

**Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene bestimmen**

$$d(M, E) = \frac{|0 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7 - 120|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{75}{5} = 15$$

d ist kleiner als Radius r. Kugel und Ebene schneiden sich also.

**Lotfußpunkt M' bestimmen:**

**Lotgerade**       $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Einsetzen in Ebene E:**

$$\begin{aligned} 0 \cdot (6 + 0t) + 4 \cdot (6 + 4t) + 3 \cdot (7 + 3t) &= 120 \\ 0 + 0t + 24 + 16t + 21 + 9t &= 120 \\ 45 + 25t &= 120 \\ 25t &= 75 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow M' = (6 | 18 | 16)$

**Radius des Schnittkreises mit Pythagoras berechnen:**

$r'^2 = R^2 - d^2 = 39^2 - 15^2 = 1521 - 225 = 1296$        $\Rightarrow r' = 36$