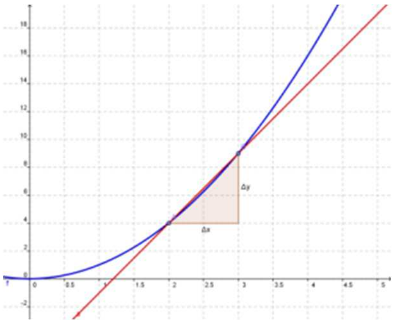
Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate

1. Schritt: Mittlere Änderungsrate

Die **mittlere Änderungsrate** entspricht der **Steigung der Sekante** durch die zwei entsprechenden Punkte.



Die Berechnung der Steigung erfolgt mit dem **Differenzenquotienten.** Dies entspricht der bekannten Berechnung mittels **Steigungsdreieck**

$$m_{[x_0;x_0+h]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Beispiel: f(x) = 5x²

Berechnung der **mittleren Änderungsrate im Intervall [2;3]:**

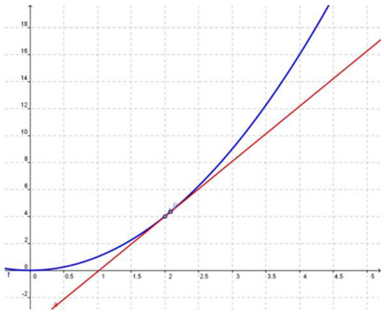
$$m_{[2;3]} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

$$= \frac{5\cdot 3^2 - 5\cdot 2^2}{3-2}$$

$$= \frac{45-20}{1} = 25$$

2. Schritt: Annäherung an die momentane Änderungsrate

Einen **Näherungswert** für die momentane Änderungsrate erhält man, wenn man immer kleinere Intervalle bei der Berechnung des Differenzenquotienten wählt.



Beispiel: f(x) = 5x², Stelle $x_0 = 2$

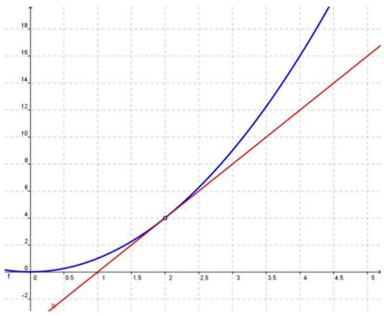
Näherung für die momentane Änderungsrate an der Stelle $x_0=2$ durch Wahl eines kleines Intervalls [2;2,1]:

$$m_{[2;2,1]} = \frac{f(2{,}1)-f(2)}{2{,}1-2}$$

$$= \frac{5\cdot 2{,}1^2 - 5\cdot 2^2}{2{,}1-2} = 20{,}5$$

3. Schritt: Ableitung an einer Stelle x_0 berechnen

Die **momentane Änderungsrate / Ableitung** entspricht der **Steigung der Tangente** im entsprechenden Punkt.



Die Berechnung erfolgt als **Grenzwert** der Sekantensteigung.

Ableitung an der Stelle x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt f **an der Stelle x_0 differenzierbar**.

Beispiel: f(x) = 5x², Stelle $x_0 = 2$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5\cdot(2+h)^2 - 5\cdot 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5\cdot(4+4h+h^2) - 5\cdot 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{20+20h+5h^2-20}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(20+5h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 20+5h = 20$$

4. Schritt: Ableitungsfunktion berechnen	*Beispiel:* f(x) = $5x^2$
Interessiert man sich an mehreren Stellen für die Tangentensteigung, so kann man statt immer neu die Ableitung an einer Stelle zu bestimmen, die Ableitung allgemein für alle Stellen angeben. Die Funktion f': $x \to f'(x)$ die dabei jedem Punkt seine Ableitung an der Stelle zuordnet heißt **Ableitungsfunktion** oder **Ableitung** von f. Voraussetzung für die Existenz der Ableitung ist, dass die Funktion für alle Stellen $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Man nennt f in diesem Fall **differenzierbar**.	$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5 \cdot (x_0+h)^2 - 5 \cdot x_0^{\ 2}}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5 \cdot (x_0^{\ 2} + 2x_0 h + h^2) - 5 \cdot x_0^{\ 2}}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{5x_0^{\ 2} + 10x_0 h + 5h^2 - 5x_0^{\ 2}}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(10x_0 + 5h)}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} 10x_0 + 5h = 10x_0$ Dies gilt für jeden Punkt x_0, so dass für die Ableitungsfunktion gilt: $f'(x) = 10x$
5. Schritt: Ableitungsfunktion aus Rechenregeln bestimmen	*Beispiel:* f(x) = $5x^2$
Die Berechnung der Ableitung f' einer Funktion lässt sich ohne aufwendige Rechnung und Grenzwertbildung mit Hilfe von den folgenden 3 Rechenregeln bestimmen: **Potenzregel:** $f(x) = x^z$ mit $z \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = z \cdot x^{z-1}$ **Faktorregel:** $f(x) = r \cdot g(x)$ mit $r \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = r \cdot g'(x)$ **Summenregel:** $f(x) = g(x) + h(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = g'(x) + h'(x)$	$f(x) = 5\,x^2$ $\Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 2 \cdot x^1 = 10x$ **Auch als Erklärvideo**

Weitere Aufgaben zum Themengebiet:

Bestimmung der Tangentengleichung an einer gegebenen Stelle x_0:	
Die Tangente durch einen Punkt entspricht einer linearen Funktion, die Funktionsgleichung lautet also allgemein: $\mathbf{f_t(x) = mx + c}$ Die Steigung m entspricht der Ableitung an der Stelle x_0. Der Wert für c lässt sich anschließend ausrechnen, indem man den Punkt $(x_0\|f(x_0))$ in die Tangentengleichung einsetzt und die Gleichung nach c auflöst. Kurzfassung: 1. Tangentengleichung $f_t(x) = mx + c$ **2. Ableitung an der Stelle x_0 berechnen $\Rightarrow$ m = $f'(x_0)$** 3. Tangentengleichung $f_t(x) = mx + c$ **4. Funktionswert an der Stelle x_0 berechnen $\Rightarrow$ P $(x_0\|f(x_0))$** **5. Punkt in Tangentengleichung einsetzen und c bestimmen.** 6. Tangentengleichung $f_t(x) = mx + c$	*Gegeben:* $f(x) = 5\,x^2$ sowie $x_0 = 1$ $\Rightarrow$Tangente: $f_t(x) = m\,x + c$ $f'(x) = 10x$ $\Rightarrow$ **m = f'(1) = 10·1 = 10** $\Rightarrow$ Tangente: $f_t(x) = 10\,x + c$ Funktionswert an der Stelle x_0: $f(1) = 5 \cdot 1^2 = 5$ Einsetzen des Punktes (1|5) in die Tangentengleichung: $5 = 10 \cdot 1 + c \quad \| -10$ **-5 = c** $\Rightarrow$ Tangente: $f_t(x) = 10\,x - 5$