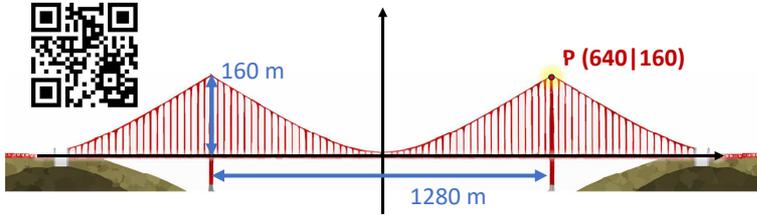


## Funktionsgleichung am Graphen ablesen



Sollte in einer Modellierungsaufgabe kein Koordinatensystem angegeben sein, dann lege den Ursprung des Koordinatensystems auf den Scheitelpunkt der Parabel. So erhältst du eine reinquadratische Funktion der Form  $y = ax^2$ , die man mit Hilfe eines weiteren Punktes bestimmen kann.

## Graphen strecken, spiegeln und verschieben

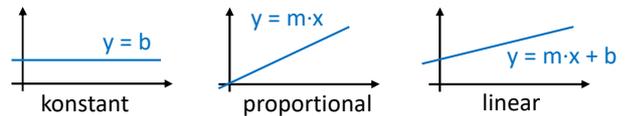
Eine typische Aufgabenstellung ist es, zu erläutern, durch welche Transformationen ein Graph aus dem Graph der Normalparabel  $y = x^2$  entstanden ist.



Funktion	Beispiel	Wirkung
$x^2 + c$	$x^2 + 3$	Verschiebung um $c$ nach oben
$(x - d)^2$	$(x - 2)^2$	Verschiebung um $d$ nach rechts
$a \cdot x^2$	$2x^2$	Streckung ( $ a  > 1$ ) oder Stauchung ( $ a  < 1$ ) entlang der y-Achse
$-x^2$	$-x^2$	Spiegelung an der x-Achse

$y = -(x + 4)^2 - 1$  entstand aus der Normalparabel durch eine Verschiebung um 4 nach links, dann der Spiegelung an der x-Achse und schließlich der Verschiebung um 1 nach unten.

## Quadratische Funktionen

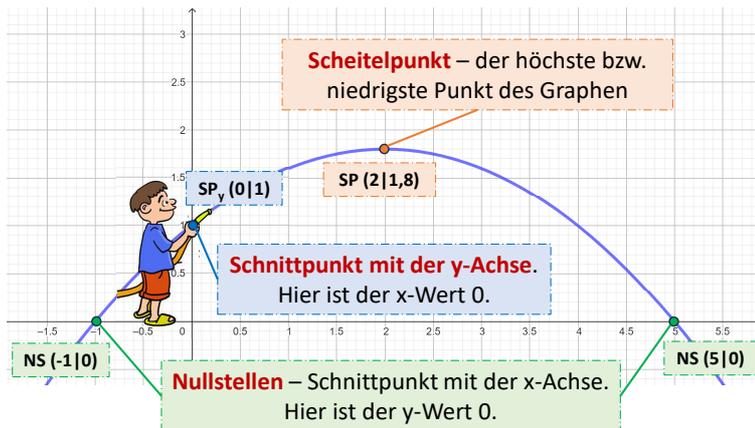


Wurfbewegungen lassen sich nicht mit den bisher durchgenommenen Funktionen (konstant, proportional und linear) modellieren. Sie können aber durch quadratische Funktionen der Form  $y = ax^2 + bx + c$  beschrieben werden.



## Besondere Punkte.

Zur Beschreibung einer quadratischen Funktion, dessen Graph **Parabel** genannt wird, sind die folgenden Punkte sehr wichtig.



## Die Faktorisierte Form → Die Scheitelpunktform

Um die **Faktorisierte Form** in die **Scheitelpunktform** umzuwandeln, sucht man den Scheitelpunkt, dessen x-Wert in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt.



### Scheitelpunkt bestimmen

#### Ohne Streckfaktor

#### Faktorisierte Form

$$y = (x - 4) \cdot (x + 2) \Rightarrow m = 4, n = -2$$

$$x_{SP} = \frac{m+n}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = 1$$

$$\text{Einsetzen: } y = (1 - 4) \cdot (1 + 2) = -9$$

$$y = (x - 1)^2 - 9$$

#### Scheitelpunktform

Der x-Wert des Scheitelpunktes liegt in der **Mitte** zwischen den Nullstellen  $m$  und  $n$ :  
Es gilt:  $x_{SP} = \frac{m+n}{2}$   
Der Funktionswert an dieser Stelle liefert den Scheitelpunkt.

#### Mit Streckfaktor

#### Faktorisierte Form

$$y = 2 \cdot (x - 5) \cdot (x + 3) \Rightarrow m = 5, n = -3$$

$$x_{SP} = \frac{m+n}{2} = \frac{5+(-3)}{2} = 1$$

$$\text{Einsetzen: } y = 2 \cdot (1 - 5) \cdot (1 + 3) = -32$$

$$y = 2 \cdot (x - 1)^2 - 32$$

#### Scheitelpunktform

## Die Scheitelpunktform



Eine quadratische Funktion in **Scheitelpunktform** wird durch die Funktionsgleichung  $y = a(x - d)^2 + e$  beschrieben.

Minuszeichen beachten!

### Einfluss auf den Graphen

$a$  ist der **Streckfaktor** der Parabel

Es gilt:

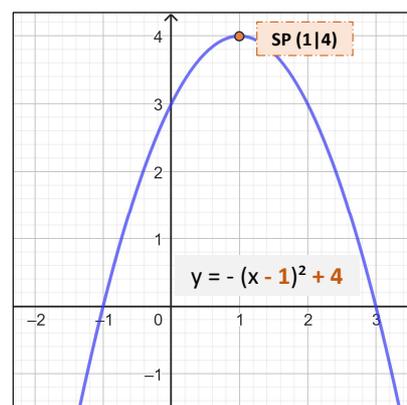
$|a| > 1$  Streckung

$|a| < 1$  Stauchung

$a < 0$  Spiegelung an der x-Achse

$d$  und  $e$  legen den Scheitelpunkt der Parabel fest. Dieser liegt bei SP ( $d|e$ )

### Schnittpunkt mit der y-Achse



#### Beispiel:

$$y = -(x - 1)^2 + 4$$

Der Scheitelpunkt von  $y = -(x - d)^2 + e$  ist SP ( $d|e$ )

#### Vergleich:

$$(x - d) = (x - 1) \Rightarrow d = 1$$

$$+ e = + 4 \Rightarrow e = 4$$

SP ( $1|4$ )

Die **Scheitelpunktform**  $y = a(x - d)^2 + e$  hat den Vorteil, dass der **Scheitelpunkt** direkt abgelesen werden kann.

Es ist: SP = ( $d|e$ )

## Die Normalform



Eine quadratische Funktion in **Normalform** wird durch die Funktionsgleichung  $y = ax^2 + bx + c$  beschrieben.

### Einfluss auf den Graphen

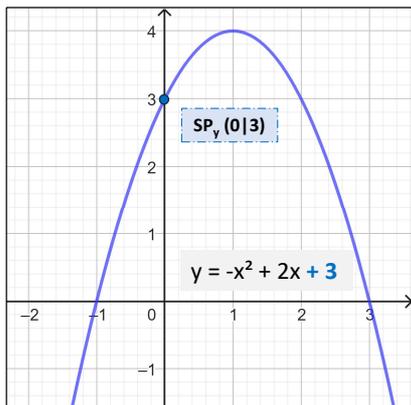
$a$  ist der **Streckfaktor** der Parabel

Es gilt:

- $|a| > 1$  Streckung
- $|a| < 1$  Stauchung
- $a < 0$  Spiegelung an der x-Achse

$c$  ist eine Verschiebung der Parabel nach oben ( $c > 0$ ) oder unten ( $c < 0$ )

### Schnittpunkt mit der y-Achse



**Beispiel:**

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

Zur Bestimmung des **Schnittpunktes mit der y-Achse** muss  $x = 0$  gelten.

$$y = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3$$

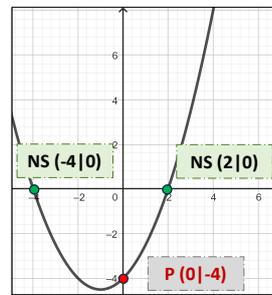
$$y = 3$$

$$SP_y(0|3)$$

Die **Normalform**  $y = ax^2 + bx + c$  hat den Vorteil, dass der **Schnittpunkt mit der y-Achse** direkt abgelesen werden kann.

Es ist:  $SP_y = (0|c)$

## Funktionsgleichung am Graphen ablesen



**Nullstellen sind abzulesen**

**Nullstellen: -4 und 2**

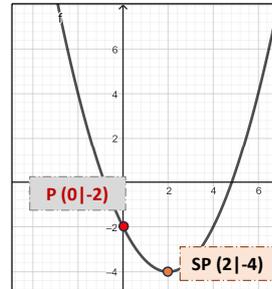
Faktorierte Form angeben:

$$y = a \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)$$

Weiteren Punkt ablesen: **P(0|-4)** und einsetzen.

$$-4 = a \cdot (0 + 4) \cdot (0 - 2) \Rightarrow a = 0,5$$

$$\Rightarrow y = 0,5 \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)$$



**Scheitelpunkt ist abzulesen**

**Scheitelpunkt: (2|-4)**

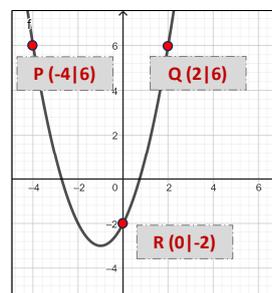
Scheitelpunktform angeben:

$$y = a \cdot (x - 2)^2 - 4$$

Weiteren Punkt ablesen: **P(0|-2)** und einsetzen.

$$-2 = a \cdot (0 - 2)^2 - 4 \Rightarrow a = 0,5$$

$$\Rightarrow y = 0,5 \cdot (x - 2)^2 - 4$$



**3 Punkte sind abzulesen**

Normalform angeben:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Punkte einsetzen und das Gleichungssystem lösen

$$P(-4|6): 6 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c$$

$$Q(2|6): 6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$P(0|-2): -2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$\Rightarrow y = 1x^2 + 2x - 2$$

## Die faktorisierte Form



Eine quadratische Funktion in **Faktorisierte Form** wird durch die Funktionsgleichung  $y = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$  beschrieben.

Minuszeichen beachten!

### Einfluss auf den Graphen

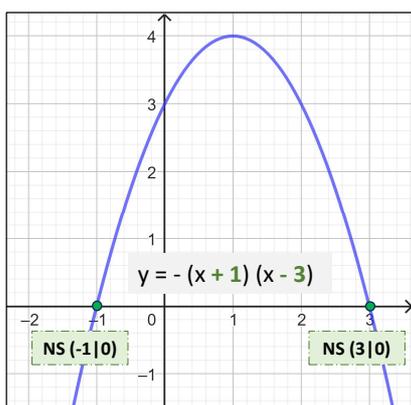
$a$  ist der **Streckfaktor** der Parabel

Es gilt:

- $|a| > 1$  Streckung
- $|a| < 1$  Stauchung
- $a < 0$  Spiegelung an der x-Achse

$m$  und  $n$  sind die Nullstellen des Graphen

### Schnittpunkt mit der y-Achse



**Beispiel:**

$$y = -(x + 1)(x - 3)$$

**Satz vom Nullprodukt**

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Diese überprüfen:

$$(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$NS_1 = (-1|0),$$

$$NS_2 = (3|0)$$

Die **Faktorisierte Form**  $y = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$  hat den Vorteil, dass die **Nullstellen**  $m$  und  $n$  direkt abgelesen werden kann.

Es ist:  $NS_1 = (m|0)$  und  $NS_2 = (n|0)$

## Die Scheitelpunktform

## Die Faktorisierte Form

Um die **Scheitelpunktform** in die **Faktorisierte Form** umzuwandeln, berechnet man durch Umformung die **Nullstellen** der Funktion.



### Nullstellen berechnen

#### Ohne Streckfaktor

**Scheitelpunktform**

$$y = (x - 1)^2 - 9$$

Nullstellen bestimmen:  $(x - 1)^2 - 9 = 0 \quad | +9$

$$(x - 1)^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - 1 = 3 \quad \text{und} \quad x - 1 = -3 \quad | +1$$

$$x_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$$

$$\Rightarrow y = (x - 4)(x + 2)$$

**Faktorisierte Form**

#### Mit Streckfaktor

**Scheitelpunktform**

$$y = 2 \cdot (x + 5)^2 - 8$$

Nullstellen bestimmen:  $2 \cdot (x + 5)^2 - 8 = 0 \quad | +8$

$$2 \cdot (x + 5)^2 = 8 \quad | :2$$

$$(x + 5)^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x + 5 = 2 \quad \text{und} \quad x + 5 = -2 \quad | -5$$

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = -7$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot (x + 3)(x + 7)$$

**Faktorisierte Form**



Um die **Normalform** in die **Faktorisierte Form** umzuwandeln, hilft es, mit der **PQ-Formel** oder **ABC-Formel** die **Nullstellen** zu berechnen.



## PQ-Formel und ABC-Formel

## Ohne Streckfaktor

## Normalform

$$y = x^2 + 2x - 15$$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-15)}$$

ergibt  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -5$

$$y = (x - 3) \cdot (x + 5)$$

## Faktorisierte Form

**PQ-Formel** zur Berechnung der Nullstellen

Voraussetzung:  
 $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## Mit Streckfaktor

## Normalform-

$$y = 4x^2 - 8x - 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12)}}{2 \cdot 4}$$

ergibt  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -1$

$$y = 4 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$$

## Faktorisierte Form

**ABC-Formel** zur Berechnung der Nullstellen

Voraussetzung:  
 $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Hinweis:** Man kann auch den Streckfaktor **a** vorklammern und mit der PQ-Formel die Nullstellen der Klammer bestimmen.



Um die **Scheitelpunktform** in die **Normalform** umzuwandeln, muss die **Scheitelpunktform** einfach ausmultipliziert werden.



## Ausmultiplizieren der Scheitelpunktform

## Ohne Streckfaktor

## Scheitelpunktform

$$y = (x + 4)^2 - 5$$

## Binomische Formel

$$= x^2 + 8x + 16 - 5$$

$$= x^2 + 8x + 11$$

## Normalform

Gleichartige Summanden zusammenfassen

## Mit Streckfaktor

## Scheitelpunktform

$$y = -2 \cdot (x + 3)^2 - 4$$

## Binomische Formel

$$= -2 \cdot (x^2 + 6x + 9) - 4$$

$$= -2x^2 - 12x - 18 - 4$$

$$= -2x^2 - 12x - 22$$

## Normalform

Distributivgesetz  
„Ausmultiplizieren“

Gleichartige Summanden zusammenfassen

Um die **Normalform** in die **Scheitelpunktform** umzuwandeln, wird die **quadratische Ergänzung** benutzt.



## Quadratische Ergänzung

## Ohne Streckfaktor

## Normalform

$$y = x^2 + 8x + 11$$

$$= x^2 + 8x$$

$$= x^2 + 8x + 16 - 16 + 11$$

$$: 2 \rightarrow 4 \rightarrow ()^2$$

$$= (x + 4)^2 - 5$$

## Scheitelpunktform

Ergänze zur binomischen Formel und subtrahiere die Zahl direkt wieder

	x + 4	
x	x <sup>2</sup>	4x
+	4x	16

→ x<sup>2</sup> 8x 16

## Mit Streckfaktor

## Normalform

$$y = 2x^2 + 12x + 10$$

$$= 2 \cdot (x^2 + 6x + 5)$$

$$= 2 \cdot (x^2 + 6x + 9 - 9 + 5)$$

$$= 2 \cdot ((x + 3)^2 - 4)$$

$$= 2 \cdot (x + 3)^2 - 8$$

## Scheitelpunktform

Streckfaktor ausklammern

Quadratische Ergänzung für die Klammer

Äußere Klammer ausmultiplizieren

Um die **Faktorisierte Form** in die **Normalform** umzuwandeln, muss die **Faktorisierte Form** einfach ausmultipliziert werden.



## Ausmultiplizieren der Faktorisierten Form

## Ohne Streckfaktor

## Faktorisierte Form

$$y = (x - 2) \cdot (x + 3)$$

$$= x^2 + 3x - 2x - 6$$

$$= x^2 + x - 6$$

## Normalform

Gleichartige Summanden zusammenfassen

## Mit Streckfaktor

## Faktorisierte Form

$$y = -2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 4)$$

$$= -2 \cdot (x^2 + 4x - x - 4)$$

$$= -2 \cdot (x^2 + 3x - 4)$$

$$= -2x^2 - 6x + 8$$

## Normalform

Gleichartige Summanden zusammenfassen

Distributivgesetz „Ausmultiplizieren“