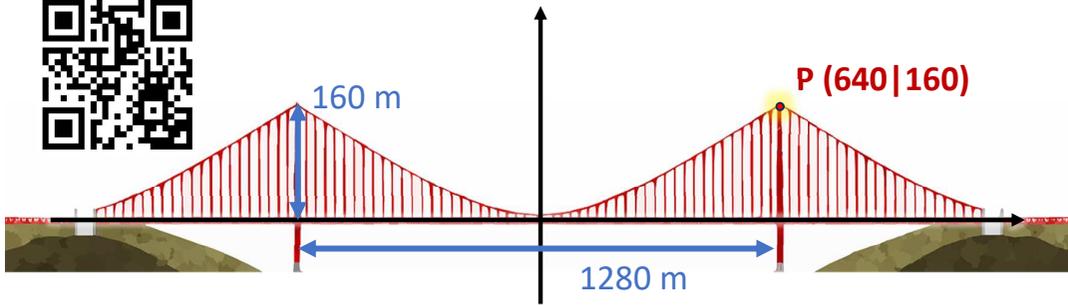


Funktionsgleichung am Graphen ablesen



Sollte in einer Modellierungsaufgabe kein Koordinatensystem angegeben sein, dann lege den Ursprung des Koordinatensystems auf den Scheitelpunkt der Parabel. So erhältst du eine reinquadratische Funktion der Form $y = ax^2$, die man mit Hilfe eines weiteren Punktes bestimmen kann.

Graphen strecken, spiegeln und verschieben

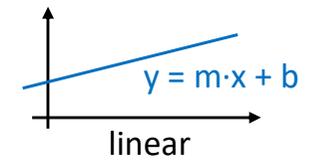
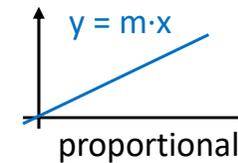
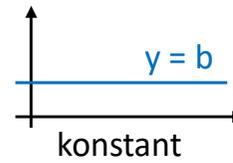
Eine typische Aufgabenstellung ist es, zu erläutern, durch welche Transformationen ein Graph aus dem Graph der Normalparabel $y = x^2$ entstanden ist.



Funktion	Beispiel	Wirkung
$x^2 + c$	$x^2 + 3$	Verschiebung um c nach oben
$(x - d)^2$	$(x - 2)^2$	Verschiebung um d nach rechts
$a \cdot x^2$	$2x^2$	Streckung ($ a > 1$) oder Stauchung ($ a < 1$) entlang der y-Achse
$-x^2$	$-x^2$	Spiegelung an der x-Achse

$y = -(x + 4)^2 - 1$ entstand aus der Normalparabel durch eine Verschiebung um **4** nach **links**, dann der **Spiegelung an der x-Achse** und schließlich der Verschiebung um **1** nach **unten**.

Quadratische Funktionen

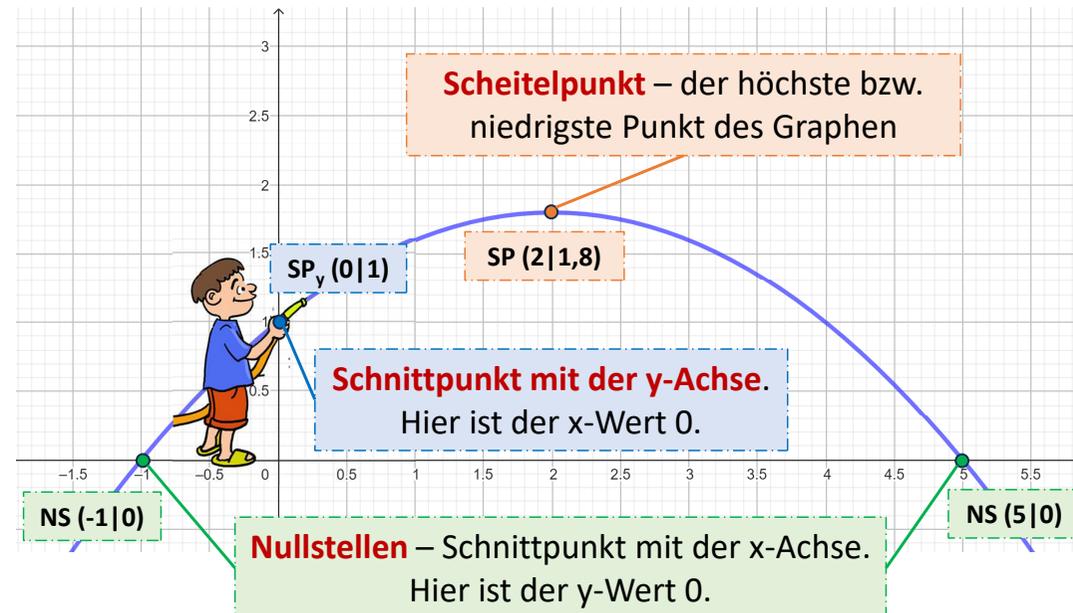


Wurfbewegungen lassen sich nicht mit den bisher durchgenommenen Funktionen (konstant, proportional und linear) modellieren. Sie können aber durch **quadratische Funktionen** der Form $y = ax^2 + bx + c$ beschrieben werden.



Besondere Punkte.

Zur Beschreibung einer quadratischen Funktion, dessen Graph **Parabel** genannt wird, sind die folgenden Punkte sehr wichtig.



Die Normalform



Eine quadratische Funktion in **Normalform** wird durch die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ beschrieben.

Einfluss auf den Graphen

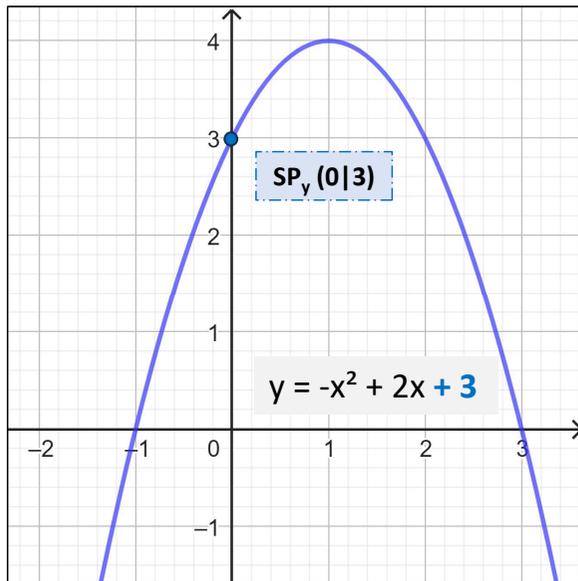
a ist der **Streckfaktor** der Parabel

Es gilt:

- $|a| > 1$ Streckung
- $|a| < 1$ Stauchung
- $a < 0$ Spiegelung an der x-Achse

c ist eine Verschiebung der Parabel nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$)

Schnittpunkt mit der y-Achse



Beispiel:

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

Zur Bestimmung des **Schnittpunktes mit der y-Achse** muss $x = 0$ gelten.

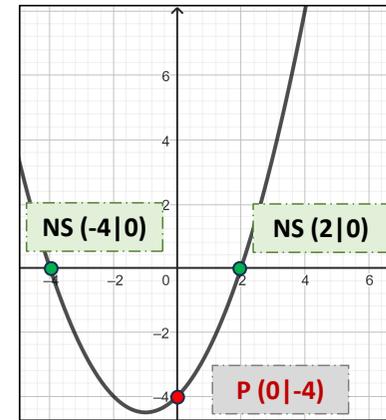
$$y = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3$$

$$y = 3$$

SP_y (0|3)

Die **Normalform** $y = ax^2 + bx + c$ hat den Vorteil, dass der **Schnittpunkt mit der y-Achse** direkt abgelesen werden kann.
Es ist: **SP_y = (0|c)**

Funktionsgleichung am Graphen ablesen



Nullstellen sind abzulesen

Nullstellen: -4 und 2

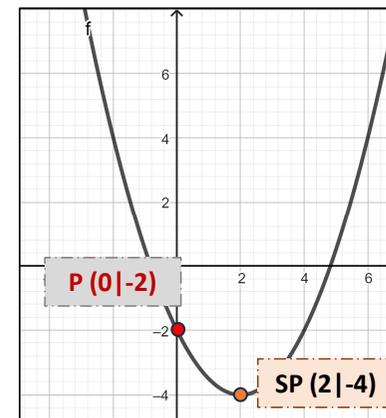
Faktorierte Form angeben:

$$y = a \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)$$

Weiteren Punkt ablesen: **P (0|-4)** und einsetzen.

$$-4 = a \cdot (0 + 4) \cdot (0 - 2) \Rightarrow a = 0,5$$

$$\Rightarrow y = 0,5 \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)$$



Scheitelpunkt ist abzulesen

Scheitelpunkt: (2|-4)

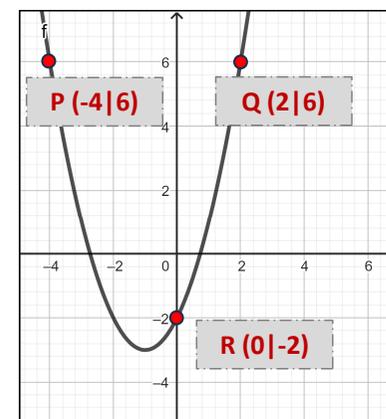
Scheitelpunktform angeben:

$$y = a \cdot (x - 2)^2 - 4$$

Weiteren Punkt ablesen: **P (0|-2)** und einsetzen.

$$-2 = a \cdot (0 - 2)^2 - 4 \Rightarrow a = 0,5$$

$$\Rightarrow y = 0,5 \cdot (x - 2)^2 - 4$$



3 Punkte sind abzulesen

Normalform angeben:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Punkte einsetzen und das Gleichungssystem lösen

$$P(-4|6): 6 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c$$

$$Q(2|6): 6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$P(0|-2): -2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$\Rightarrow y = 1x^2 + 2x - 2$$

Die Faktorisierte Form

Die Scheitelpunktform

Um die **Faktorisierte Form** in die **Scheitelpunktform** umzuwandeln, sucht man den Scheitelpunkt, dessen x-Wert in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt.



Scheitelpunkt bestimmen

Ohne Streckfaktor

Faktorisierte Form

$$y = (x - 4) \cdot (x + 2) \Rightarrow m = 4, n = -2$$

$$x_{SP} = \frac{m + n}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$\text{Einsetzen: } y = (1 - 4) \cdot (1 + 2) = -9$$

$$y = (x - 1)^2 - 9$$

Scheitelpunktform

Der x-Wert des Scheitelpunktes liegt in der **Mitte** zwischen den Nullstellen **m** und **n**:

$$\text{Es gilt: } x_{SP} = \frac{m + n}{2}$$

Der Funktionswert an dieser Stelle liefert den Scheitelpunkt.

Mit Streckfaktor

Faktorisierte Form

$$y = 2 \cdot (x - 5) \cdot (x + 3) \Rightarrow m = 5, n = -3$$

$$x_{SP} = \frac{m + n}{2} = \frac{5 + (-3)}{2} = 1$$

$$\text{Einsetzen: } y = 2 \cdot (1 - 5) \cdot (1 + 3) = -32$$

$$y = 2 \cdot (x - 1)^2 - 32$$

Scheitelpunktform

Die Scheitelpunktform



Eine quadratische Funktion in **Scheitelpunktform** wird durch die Funktionsgleichung $y = a(x - d)^2 + e$ beschrieben.

Minuszeichen beachten!

Einfluss auf den Graphen

a ist der **Streckfaktor** der Parabel

Es gilt:

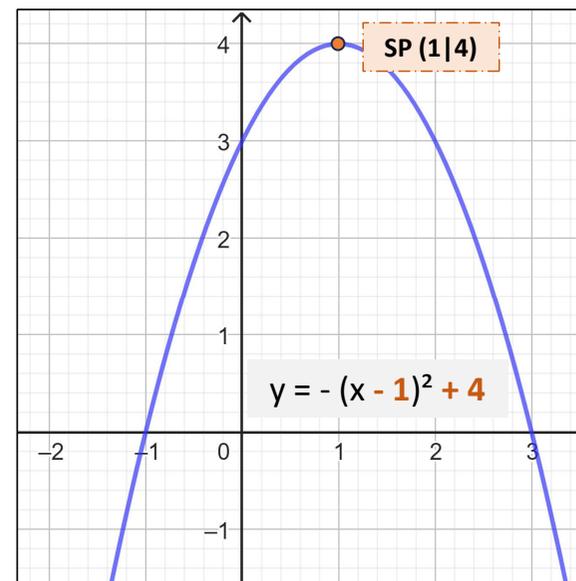
$|a| > 1$ Streckung

$|a| < 1$ Stauchung

$a < 0$ Spiegelung an der x-Achse

d und **e** legen den Scheitelpunkt der Parabel fest. Dieser liegt bei SP (**d**|**e**)

Schnittpunkt mit der y-Achse



Beispiel:

$$y = -(x - 1)^2 + 4$$

Der Scheitelpunkt von $y = -(x - d)^2 + e$ ist SP (**d**|**e**)

Vergleich:

$$(x - d) = (x - 1) \Rightarrow d = 1$$

$$+ e = + 4 \Rightarrow e = 4$$

SP (1|4)

Die **Scheitelpunktform** $y = a(x - d)^2 + e$ hat den Vorteil, dass der **Scheitelpunkt** direkt abgelesen werden kann.

Es ist: **SP = (d|e)**

Die faktorisierte Form



Eine quadratische Funktion in **Faktorisierte Form** wird durch die Funktionsgleichung $y = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$ beschrieben.

Minus-
zeichen
beachten!

Einfluss auf den Graphen

a ist der **Streckfaktor** der Parabel

Es gilt:

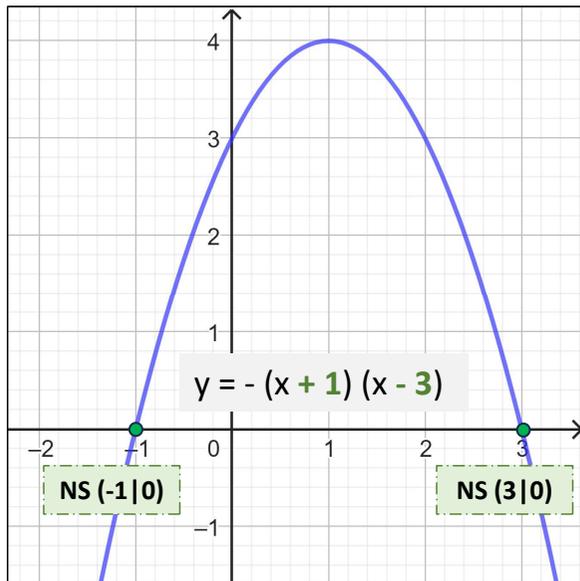
$|a| > 1$ Streckung

$|a| < 1$ Stauchung

$a < 0$ Spiegelung an der x-Achse

m und n sind die
Nullstellen des
Graphen

Schnittpunkt mit der y-Achse



Beispiel:

$$y = -(x + 1)(x - 3)$$

Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist 0,
wenn einer der
Faktoren 0 ist.

Diese überprüfen:

$$(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$NS_1 = (-1|0),$$

$$NS_2 = (3|0)$$

Die **Faktorisierte Form** $y = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$ hat den Vorteil, dass die **Nullstellen** m und n direkt abgelesen werden kann.

Es ist: $NS_1 = (m|0)$ und $NS_2 = (n|0)$

Die Scheitelpunktform

Die Faktorisierte Form

Um die **Scheitelpunktform** in die **Faktorisierte Form** umzuwandeln, berechnet man durch Umformung die **Nullstellen** der Funktion.



Nullstellen berechnen

Ohne Streckfaktor

Scheitelpunktform

$$y = (x - 1)^2 - 9$$

$$\text{Nullstellen bestimmen: } (x - 1)^2 - 9 = 0 \quad | +9$$

$$(x - 1)^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - 1 = 3 \quad \text{und} \quad x - 1 = -3 \quad | +1$$

$$x_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$$

$$\Rightarrow y = (x - 4)(x + 2)$$

Faktorisierte Form

Mit Streckfaktor

Scheitelpunktform

$$y = 2 \cdot (x + 5)^2 - 8$$

$$\text{Nullstellen bestimmen: } 2 \cdot (x + 5)^2 - 8 = 0 \quad | +8$$

$$2 \cdot (x + 5)^2 = 8 \quad | :2$$

$$(x + 5)^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x + 5 = 2 \quad \text{und} \quad x + 5 = -2 \quad | -5$$

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = -7$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot (x + 3)(x + 7)$$

Faktorisierte Form

Die Normalform

Die Faktorisierte Form

Um die **Normalform** in die **Faktorisierte Form** umzuwandeln, hilft es, mit der **PQ-Formel** oder **ABC-Formel** die **Nullstellen** zu berechnen.



PQ-Formel und ABC-Formel

Ohne Streckfaktor

Normalform

$$y = x^2 + 2x - 15$$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-15)}$$

ergibt $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$

$$y = (x - 3) \cdot (x + 5)$$

Faktorisierte Form

PQ-Formel zur Berechnung der Nullstellen

Voraussetzung:
 $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Mit Streckfaktor

Normalform

$$y = 4x^2 - 8x - 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12)}}{2 \cdot 4}$$

ergibt $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$

$$y = 4 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$$

Faktorisierte Form

ABC-Formel zur Berechnung der Nullstellen

Voraussetzung:
 $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hinweis: Man kann auch den Streckfaktor **a** vorklammern und mit der PQ-Formel die Nullstellen der Klammer bestimmen.

Die Scheitelpunktform

Die Normalform

Um die **Scheitelpunktform** in die **Normalform** umzuwandeln, muss die **Scheitelpunktform** einfach ausmultipliziert werden.



Ausmultiplizieren der Scheitelpunktform

Ohne Streckfaktor

Scheitelpunktform

$$y = (x + 4)^2 - 5$$

Binomische Formel

$$= x^2 + 8x + 16 - 5$$

$$= x^2 + 8x + 11$$

Normalform

Gleichartige Summanden zusammenfassen

Mit Streckfaktor

Scheitelpunktform

$$y = -2 \cdot (x + 3)^2 - 4$$

Binomische Formel

$$= -2 \cdot (x^2 + 6x + 9) - 4$$

$$= -2x^2 - 12x - 18 - 4$$

$$= -2x^2 - 12x - 22$$

Normalform

Distributivgesetz „Ausmultiplizieren“

Gleichartige Summanden zusammenfassen

Die Normalform

Die Scheitelpunktform

Um die **Normalform** in die **Scheitelpunktform** umzuwandeln, wird die **quadratische Ergänzung** benutzt.



Quadratische Ergänzung

Ohne Streckfaktor

Normalform

$$y = x^2 + 8x + 11$$

$$= x^2 + 8x + 11$$

$$= x^2 + 8x + 16 - 16 + 11$$

$$\begin{array}{l} :2 \downarrow \quad \uparrow ()^2 \\ \quad \quad 4 \end{array}$$

$$= \underbrace{(x + 4)^2}_{\text{Binomische Formel}} \underbrace{- 5}_{\text{Rest}}$$

Scheitelpunktform

Ergänze zur binomischen Formel und subtrahiere die Zahl direkt wieder

$$\begin{array}{c} x + 4 \\ x + 4 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline x^2 & 4x \\ \hline 4x & 16 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline x^2 & 8x & 16 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Mit Streckfaktor

Normalform

$$y = 2x^2 + 12x + 10$$

$$= 2 \cdot (x^2 + 6x + 5)$$

$$= 2 \cdot (x^2 + 6x + 9 - 9 + 5)$$

$$= 2 \cdot ((x + 3)^2 - 4)$$

$$= 2 \cdot (x + 3)^2 - 8$$

Scheitelpunktform

Streckfaktor ausklammern

Quadratische Ergänzung für die Klammer

Äußere Klammer ausmultiplizieren

Die Faktorisierte Form

Die Normalform

Um die **Faktorisierte Form** in die **Normalform** umzuwandeln, muss die **Faktorisierte Form** einfach ausmultipliziert werden.



Ausmultiplizieren der Faktorisierten Form

Ohne Streckfaktor

Faktorisierte Form

$$y = (x - 2) \cdot (x + 3)$$

$$= x^2 + 3x - 2x - 6$$

$$= x^2 + x - 6$$

Normalform

Gleichartige Summanden zusammenfassen

Mit Streckfaktor

Faktorisierte Form

$$y = -2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 4)$$

$$= -2 \cdot (x^2 + 4x - x - 4)$$

$$= -2 \cdot (x^2 + 3x - 4)$$

$$= -2x^2 - 6x + 8$$

Normalform

Gleichartige Summanden zusammenfassen

Distributivgesetz „Ausmultiplizieren“