Übersicht Analysis

Steigung eines Graphen – Ableitung

Ableitung bestimmen

Mit Hilfe des Differenzenquotienten wird die mittlere Änderungsrate mittels Grenzwertbildung in die momentane Änderungsrate überführt. Mit Hilfe der h-Methode kann die Steigung der Tangente an einen Graphen, also die Ableitung, an einer Stelle bestimmt werden.

Erklärvideo

Arbeiten mit dem Graphen

Grafisches Ableiten

Aus einem gegebenen Graphen kann ohne Kenntnis der Funktionsgleichung und ohne Durchführung einer Kurvendiskussion der Graph der Ableitungsfunktion skizziert werden. Kurzgefasst gilt:

Wendestelle von f $\rightarrow$ Extremstelle von f ´

Extremstelle von f $\rightarrow$ Nullstelle von f ´

Erklärvideo

Funktionswert, Ableitung und Kurvenverhalten ablesen

Aus einem gegebenen Graph kann der Funktionswert, die erste Ableitung (die der Steigung entspricht) oder die zweite Ableitung (die dem Krümmungsverhalten entspricht) abgelesen werden.

Erklärvideo

Wie ist der Graph aus einem anderen entstanden?

Wie ist der Graph der Funktion $f(x) = 3 \cdot (x - 2)^2 + 1$ aus dem Graph der Normalparabel $f(x) = x^2$ entstanden? Wie wurde der Graph verschoben, gespiegelt und gestreckt?

Erklärvideo

Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendiskussion werden besondere Punkte (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) sowie weitere besondere Eigenschaften (Symmetrie, Asymptoten, …) einer Funktion gesucht. Mit diesen kann man den Verlauf des Funktionsgraphen sehr gut beschreiben.

Erklärvideo

Nullstellen berechnen

Nullstellen

Ob die Nullstellen einer Funktion oder die Nullstellen der ersten oder zweiten Ableitung: Die Berechnung von Nullstellen ist für eine Kurvendiskussion existentiell.
Durch Ausklammern, PQ-Formel, ABC-Formel, Substitution, … können die Nullstellen einer gegebenen Funktion bestimmt werden.

Lernblatt

Polynomdivision

Hat man eine Funktion 3. Gerades vorliegen, bei der x nicht ausgeklammert werden kann, so muss eine Nullstelle durch Probieren oder Raten ermittelt werden. Im Anschluss ist eine Polynomdivision durchzuführen, um den Linearfaktor abzutrennen und den quadratischen Term zu erhalten, den man dann mit PQ- oder ABC-Formel weiter untersuchen kann.

Erklärvideo

Schnittpunkt mit der y-Achse

Beim Schnittpunkt mit der y-Achse handelt es sich um den Punkt (0|…). Die x-Koordinate ist also 0. Zur Berechnung des Funktionswertes ist somit einfach f(0) zu bestimmen.

Ableitungsregeln

Einfache Ableitungsregeln

Es gelten die folgenden Ableitungsregeln:

Potenzregel: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$ (mit $c \in R$)

Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

Besondere Ableitungen:

$f(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = 1/x$

Erklärvideo

Verkettung von Funktionen

Zwei Funktionen g(x) und h(x) lassen sich verketten als

$g \circ h(x) = g(h(x))$ oder $h \circ g(x) = h(g(x))$

Für $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = x^2$ ist

$g \circ h(x) = g(h(x)) = \sin(x^2)$

$h \circ g(x) = h(g(x)) = (\sin(x))^2$

Erklärvideo

Kettenregel

Für die Ableitung einer verketteten Funktion benötigt man die Kettenregel:

Ist $f(x) = g(h(x))$, so gilt für die Ableitung $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Kurzgefasst:

äußere Ableitung · innere Ableitung

Erklärvideo

Kurvendiskussion ganzrationale Funktion

Im nebenstehenden Video finden sich am Beispiel einer ganzrationalen Funktion alle Bestandteile der Kurvendiskussion (Nullstellen, Extremstellen, …) erklärt und vorgerechnet.

Erklärvideo

Definitionsbereich

Meist ist der Definitionsbereich einer Funktion R, also alle reellen Zahlen. Es gibt aber drei Fälle, bei denen man aufpassen muss und bei denen der Definitionsbereich eingeschränkt ist.
Brüche: Der Nenner eines Bruches darf nicht 0 sein.
Wurzeln: Das Argument unter der Wurzel muss größer oder gleich 0 sein.
Logarithmus: Das Argument des Logarithmus muss größer als 0 sein.

Erklärvideo

Symmetrie

Hat eine ganzrationale Funktion nur gerade Exponenten, so ist die Funktion **achsensymmetrisch** zur y-Achse. Es gilt $\mathbf{f(-x) = f(x)}$.
Hat eine ganzrationale Funktion nur ungerade Exponenten, so ist die Funktion **punktsymmetrisch** zum Ursprung. Es gilt $\mathbf{-f(-x) = f(x)}$.

Verhalten gegen unendlich

Den Verlauf der wichtigsten Funktionen sollte man kennen.
Zum Beispiel:

f(x)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
x^2	∞	∞
x^3	$-\infty$	∞
$1/x$	0–	0+
e^x	0+	∞

Bei einem Produkt wird es interessant, wenn ein Faktor gegen 0 und der andere gegen unendlich geht. Bei einem **Produkt mit einer e-Funktion überwiegt** dabei das Verhalten der **e-Funktion**. So ist z.B.
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x = 0$, obwohl x^2 hier gegen unendlich geht.

Lernblatt Funktionen

Erklärvideo

Kurvendiskussion ganzrationale Funktion

Extremstellen:
Notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$
Hinreichendes Kriterium: $f''(x) \neq 0$ Ist $f''(x) = 0$ dann VZW von $f'(x)$
Wendestellen:
Notwendiges Kriterium: $f''(x) = 0$
Hinreichendes Kriterium: $f'''(x) \neq 0$ Ist $f'''(x) = 0$ dann VZW von $f''(x)$

Erklärvideo

Kurvendiskussion e-Funktion

Die Suche nach Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen unterscheidet sich nicht sonderlich von der bei ganzrationalen Funktionen. Mit dem Erklärvideo kannst du aber trotzdem nochmal ein Beispiel für eine Kurvendiskussion Schritt für Schritt durchgehen.

Erklärvideo

Randextrema

Ist der Definitionsbereich einer Funktion eingeschränkt, so muss bei einer Kurvendiskussion die Untersuchung auf Randextrema erfolgen. D.h. untersuche, ob es sich an den Rändern, also bei f(a) und f(b) um ein lokales bzw. globales Maximum oder Minimum handelt.

Tangenten

Tangente durch einen Punkt des Graphen bzw. Wendetangente

Für die Tangentengleichung $y = m \cdot x + b$ an der Stelle x_0 ist die Steigung $m = f'(x_0)$ an der entsprechenden Stelle x_0. Den Punkt $(x_0|f(x_0))$ anschließend in die Tangentengleichung einsetzen und b berechnen.

Soll die Normale, also Senkrechte auf den Graphen berechnet werden, so lässt sich die Normalensteigung aus der Tangentensteigung mit dem folgenden Zusammenhang berechnen: $m_{\text{Tangente}} \cdot m_{\text{Normale}} = -1$

Für den Steigungswinkel der Tangente gilt: $\tan(\alpha) = f'(x_0)$

Erklärvideo

Tangente durch einen Punkt außerhalb des Graphen

Die allgemeine Formel für eine Tangente durch einen Punkt $(x_0|y_0)$ außerhalb des Graphen lautet:

$$\mathbf{t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)}$$

Diese Gleichung für die gegebene Funktion aufstellen und anschließend den Punkt $(x_0|y_0)$ einsetzen. Die verbleibende Gleichung nach u auflösen. Möglicherweise gibt es mehrere Lösungen. Die in die Tangentengleichung einsetzen und die jeweilige Tangente bestimmen.

Erklärvideo

Ortskurve

Bei Kurvenscharen liegen Extrempunkte bzw. Wendepunkte auf einer eigenen Funktion, der sogenannten Ortskurve.

Hierzu beispielsweise den Extrempunkt bestimmen: $T\left(\frac{a}{2} \,\middle|\, -\frac{a^2}{4}\right)$

Die Gleichung für x nach a umstellen (a = 2x) und für y einsetzen:

$y = -\frac{a^2}{4} = -\frac{(2x)^2}{4} = -\frac{4x^2}{4} = -x^2$ Dies ist dann die Ortskurve $y = x^2$

Erklärvideo

Funktionen rekonstruieren, Steckbriefaufgaben

Mit Hilfe der folgenden Tabelle kannst du aus der Aufgabenstellung Voraussetzungen an die Funktionsgleichung bzw. deren Ableitungen aufstellen. Anschließend das entstandene Gleichungssystem z.B. mit dem Gaußverfahren lösen.

Aussage	Punkt	Steigung	Kurve
Der Funktionsgraph …	f(x)	f´(x)	f´´(x)
… geht durch den **Punkt** (2|1)	f(2) = 1		
… verläuft durch den Ursprung	f(0) = 0		
… schneidet die x-Achse bei x = 3	f(3) = 0		
… schneidet die y-Achse bei y = 5	f(0) = 5		
… hat an der Stelle x = 5 die **Steigung** 2		f´(5) = 2	
… ist bei x = 2 parallel zur Geraden y = 3x + 5		f´(2) = 3	
… hat an der Stelle x = 4 eine **Extremstelle**		f´(4) = 0	
… hat im **Punkt** (3|1) einen **Extrempunkt**	f(3) = 1	f´(3) = 0	
… berührt die x-Achse bei x = 2	f(2) = 0	f´(2) = 0	
… hat bei x = 2 einen **Wendepunkt**			f´´(2) = 0
… hat im **Punkt** (5|3) einen **Wendepunkt**	f(5) = 3		f´´(5) = 0

Erklärvideo

Erklärvideo Gaußverfahren

Gebrochen rationale Funktionen

Während ganzrationale Funktionen die Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ haben, lassen sich **gebrochen rationale Funktionen als Quotient zweier ganzrationalen Funktionen** schreiben:

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ mit zwei ganzrationalen Funktionen g(x) und h(x)

Definitionslücken/Polstellen

Eine Definitionslücke, die durch das Kürzen der Funktion behoben werden kann, heißt **hebbare Definitionslücke**. Sie ist nach dem Kürzen nicht mehr erkennbar.
Betrachtet man nun die **gekürzte** Funktion, so liegt an der Stelle, an der das Nennerpolynom eine Nullstelle hat eine **Polstelle** vor.
Betrachte nun die Vielfachheit der Nullstelle x_0 des Nennerpolynoms:
ungerade Vielfachheit
⇒ senkrechte Asymptote bei x_0 **mit** Vorzeichenwechsel.
gerade Vielfachheit
⇒ senkrechte Asymptote bei x_0 **ohne** Vorzeichenwechsel.

Asymptoten

Aussagen über mögliche **Asymptoten** lassen sich aus dem Grad **z** des Zählerpolynoms und dem Grad **n** des Nennerpolynoms ablesen.
1. Fall: $z < n \Rightarrow$ x-Achse ist waagrechte Asymptote
2. Fall: $z = n \Rightarrow$ waagrechte Asymptote
3. Fall: $z = n + 1 \Rightarrow$ schräge Asymptote der Form $y = m\cdot x$
4. Fall: $z > n + 1 \Rightarrow$ keine gerade Asymptote

2. Fall: Die Potenz mit dem höchsten Exponenten vorklammern und kürzen. Dann die Grenzwertbestimmung vornehmen.
3. Fall: Zur Bestimmung der Asymptotengleichung kann man eine **Polynomdivision** des Zählers durch den Nenner durchführen. Der erste Summand des Ergebnisses entspricht der Asymptotengleichung, da der Grenzwert des Restes 0 ist.

Integralrechnung

Um die Fläche unter einem Graphen zu ermitteln, nähert man sich über eine Abschätzung durch Ober- und Untersummen an, um schließlich den Begriff des Integrals einzuführen. Zur Berechnung benötigt man die **Stammfunktion F(x)** von f(x) und den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)**

A = $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|[F(x)]_a^b\right| = |F(b) - F(a)|$

Erklärvideo

Stammfunktion finden

Zur Bestimmung einer Stammfunktion einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ gilt:

$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad , c \in \mathbb{R}$

Um zu überprüfen, ob F(x) eine Stammfunktion zu f(x) ist, muss man F(x) ableiten. Es muss $F'(x) = f(x)$ gelten.

Partielle Integration

Liegt ein zu integrierendes Produkt vor, das sich in der Form $f'(x) \cdot g(x)$ schreiben lässt, so lässt sich dieses Integral partiell integrieren als

$$\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

Die **Partielle Integration** ist sinnvoll anzuwenden, wenn eine Stammfunktion zu f' bekannt ist (oder sich leicht bestimmen lässt) und der Integralausdruck auf der rechten Seite einfacher zu berechnen ist.

Integration durch Substitution

Vorgehen bei der Substitution am Beispiel von $\int e^{5x}\,dx$

1- Setze u mit dem zu substituierenden Term gleich $\Rightarrow$ u = 5x

2- löse die Gleichung nach x auf $\Rightarrow x = \frac{u}{5} \Rightarrow \varphi(u) = \frac{u}{5}$

3- leite die Gleichung ab $\Rightarrow \varphi'(u) = \frac{1}{5}$

4- Die Integrationsvariable ersetzen: **$dx = \varphi'(u)\,du$ =** $\frac{1}{5}$ du

5- Substituieren von x und dx $\Rightarrow \int e^{5x}\,dx = \int e^{u}\frac{1}{5}du$

6- Integrieren $\Rightarrow \int e^{u}\frac{1}{5}du = \frac{1}{5}e^{u}$

7- Rücksubstitution $\Rightarrow \frac{1}{5}e^{u} = \frac{1}{5}e^{5x}$

Flächenberechnung und Fläche zwischen zwei Graphen

<u>Vorgehensweise zur Flächenberechnung:</u>

Es sei die Funktion **f(x)** und die Grenzen **a** und **b** gegeben.

1. Suche die Nullstellen im Intervall [a;b] $\Rightarrow$ $\mathbf{NS_1}$, $\mathbf{NS_2}$, …
2. Berechne die einzelnen Intervalle und addiere deren Beträge

$$A = \left|\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{NS1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx}\right| + \left|\int_{\mathbf{NS1}}^{\mathbf{NS2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx}\right| + \ldots + \left|\int_{\mathbf{NS}i}^{\mathbf{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx}\right|$$

Soll die Fläche zwischen den Graphen g(x) und h(x) bestimmt werden, dann bildet man die Funktion f(x) = g(x) – h(x) und verfährt wie oben bei der Flächenberechnung.

Erklärvideo

Rotationskörper

Lässt man eine Funktion f(x) um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Das Volumen dieses Körpers berechnet sich als

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$