Die Produktregel

Eine Funktion f wie z. B. $f(x) = 8x^2 \cdot \sin(x)$, die als **Produkt von zwei Faktoren** u und v geschrieben werden kann, leitet man so ab:

1. Die beiden Faktoren festlegen und ableiten: $u(x) = 8x^2$, $u'(x) = 16x$, $v(x) = \sin(x)$, $v'(x) = \cos(x)$
2. Die Ableitung f′ mithilfe der **Produktregel** bilden: **$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$**

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 16x \cdot \sin(x) + 8x^2 \cdot \cos(x)$$

Für die Funktion f mit $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x}$ gilt:

1. Die beiden Faktoren festlegen und ableiten: $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. Die Ableitung f′ mithilfe der Produktregel bilden:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1 Füllen Sie die Tabelle aus.

f(x)	u(x)	u′(x)	v(x)	v′(x)	f′(x)
$(4x - 2) \cdot \sin(x)$					
$(4x - 2) \cdot \cos(x)$					
$(4x - 2) \cdot \sqrt{x}$					
$\frac{1}{x} \cdot \sin(x)$					
$(3x^2 - 5) \cdot \sqrt{x}$					

2 Ergänzen Sie.

a) $f(x) = (3x - 1) \cdot \cos(x)$, $f'(x) = 3\cos(x)$ ____________

b) $g(x) = (1 - x^3) \cdot \sqrt{x}$, $g'(x) = -3x^2 \cdot \sqrt{x} +$ ____________

c) $h(x) = 5x^2 \cdot \sin(x)$, $h'(x) = 10x \cdot$ ________________

d) $i(x) = \frac{5}{x^2} \cdot \sin(x)$, $i'(x) =$ ________________________

Die Quotientenregel

Ist eine Funktion f wie $f(x) = \frac{8x^2}{\sin(x)}$ ein **Quotient von zwei Funktionen** u und v, dann leitet man $f = \frac{u}{v}$ so ab:

1. Die beiden Funktionen u und v ableiten: $u(x) = 8x^2$, $u'(x) = 16x$, $v(x) = \sin(x)$, $v'(x) = \cos(x)$
2. Die Ableitung f′ mithilfe der **Quotientenregel** bilden:

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{\mathbf{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}}{\mathbf{(v(x))^2}} = \frac{16x \cdot \sin(x) - 8x^2 \cdot \cos(x)}{(\sin(x))^2}$$

Für die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^3 - 1}{2x + 5}$ gilt:

1. Die beiden Funktionen u und v ableiten: $u(x) = x^3 - 1$, $u'(x) = 3x^2$, $v(x) = 2x + 5$, $v'(x) = 2$
2. Die Ableitung f′ mithilfe der Quotientenregel bilden. Wenn möglich, Term vereinfachen:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{3x^2 \cdot (2x + 5) - (x^3 - 1) \cdot 2}{(2x + 5)^2} = \frac{6x^3 + 15x^2 - 2x^3 + 2}{(2x + 5)^2} = \frac{4x^3 + 15x^2 + 2}{(2x + 5)^2}$$

1 Füllen Sie die Tabelle aus.

f(x)	u(x)	u′(x)	v(x)	v′(x)	f′(x)
$\frac{\frac{1}{2}\sin(x)}{x^2}$					
$\frac{\frac{1}{2}\cos(x)}{x^2}$					
$\frac{3x}{x - 2}$					
$\frac{3x - 8}{x - 2}$					

2 Ergänzen Sie.

a) $f(x) = \frac{2x}{x + 3}$, $f'(x) = \frac{2 \cdot (x + 3) - \_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_}$

b) $g(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x - 5}$, $g'(x) = \frac{x \cdot (2x - 5) - \_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_}$

c) $h(x) = \frac{2x}{\sin(x)}$, $h'(x) = \frac{\_\_\_\_\_\_}{(\sin(x))^2}$

d) $i(x) = \frac{6 - 4x}{4x + 3}$, $i'(x) = \_\_\_\_\_\_$