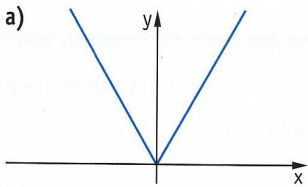
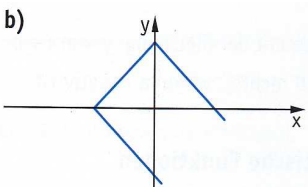
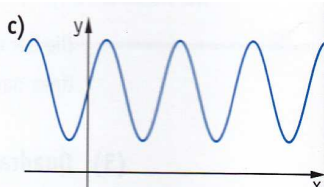
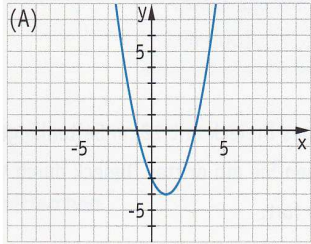
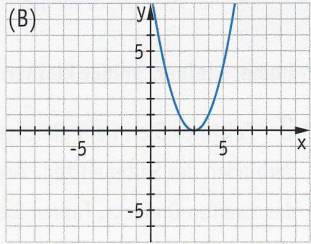
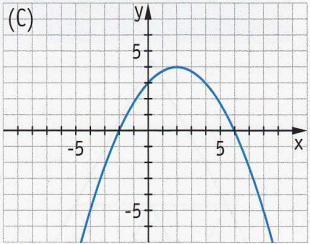


Fit für die MSS ? Wiederholungsaufgaben aus Klasse 8-10

Aufgaben	Richtig	Schwierig? 😊 😐 😞
<u>Themengebiet 1: Terme</u>	__ / 11	
1. Vereinfache: $-(9x - 2) + 3x \cdot 2xy + 2x \cdot (2 - 3xy) - (x + 3) \cdot (x - 2) + (x + 3)^2$	__ / 1	
2. Kürze: a) $\frac{12abc}{15a^2b}$ b) $\frac{5x-10}{5}$ c) $\frac{3yx}{xy+x^2y^2}$ d) $\frac{x+1}{x^2-2x+1}$	__ / 4	
3. Berechne: a) $\frac{6}{x+1} - \frac{5-x}{x+1}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ c) $1 - \frac{3x}{x^2-9} - \frac{x}{x+3}$	__ / 3	
4. Löse die Gleichungen: a) $\frac{1}{3} - \frac{4}{x} = 1$ b) $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{x^2-2x}$ c) $\frac{1}{x-3} - 2 = \frac{1}{2(x-3)}$	__ / 3	
<u>Themengebiet 2: Funktionen</u>	__ / 5	
1. Kann der Graph zu einer Funktion gehören? a)  b)  c) 	__ / 3	
2. Prüfe, ob der angegebene Punkt auf dem Graph f liegt: a) $f(x) = -2x + 1$, P (5 -9) b) $f(x) = -2x + 1$, P (-3 6)	__ / 2	
<u>Themengebiet 3: Proportionale Funktionen</u>	__ / 2	
1. Der Graph einer proportionalen Funktion geht durch den Punkt (2 6). Bestimme die Steigung und gib die Funktionsgleichung an.	__ / 2	
<u>Themengebiet 4: Lineare Funktionen</u>	__ / 4	
1. Bestimme die Funktionsvorschrift f(x) der linearen Funktion, deren Graph durch Punkt P geht und die Steigung m hat. a) P (4 7), m = -3 b) P (2 -5), m = 2	__ / 2	
2. Bestimme die Funktionsvorschrift f(x) der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte A und B geht. a) A (2 3), B (5 6) b) A (4 4), B (6 7)	__ / 2	
<u>Themengebiet 4.1: Achsenschnittpunkte</u>	__ / 2	
1. Berechne die Schnittstellen des Graphen mit den Koordinatenachsen a) $f(x) = 3x + 8$ b) $f(x) = 2x - 4$	__ / 2	
<u>Themengebiet 5: Lineare Gleichungssysteme</u>	__ / 2	
1. Gib die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an. a) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$	__ / 2	

Themengebiet 6: Quadratische Funktionen	__ / 7	
1. Gib die Gleichung zur abgebildeten Parabel an. (A)  (B)  (C) 	__ / 3	
2. Bestimme den Scheitelpunkt des Graphen der folgenden Funktionen: a) $f(x) = x^2 + 4$ b) $f(x) = (x+3)^2 - 2$	__ / 2	
3. S ist der Scheitel einer verschobenen Normalparabel. Bestimme die Funktionsvorschrift a) S (0 7) b) S (-6 -5)	__ / 2	
Themengebiet 6.1: Nullstellen quadratischer Gleichungen	__ / 2	
1. Bestimme die Lösungsmenge mit Hilfe der quadratischen Ergänzung oder der pq-Formel. a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$	__ / 2	
Themengebiet 7: Wurzeln und Wurzelgesetze	__ / 11	
1. Vereinfache: a) $(2 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 2)$ b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ c) $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}) : \sqrt{abc}$	__ / 3	
2. Vereinfache durch teilweises Wurzelziehen und Ausklammern: a) $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ b) $\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - \sqrt{48}$ c) $3\sqrt{z} - \sqrt{4z}$	__ / 3	
3. Forme durch Erweitern und Kürzen so um, dass im Nenner keine Wurzeln mehr auftreten. a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{x+y}}$ c) $\frac{3}{4 + \sqrt{x}}$	__ / 3	
4. Löse die Gleichungen: a) $\sqrt{2x-3} - 5 = 0$ b) $\sqrt{x+5} = 4\sqrt{x}$	__ / 2	
Themengebiet 8: Potenzen und Potenzgesetze	__ / 12	
1. Vereinfache: a) $s^5 \cdot s^{-3}$ b) $e^x \cdot e$ c) $u^{2k} : u^k$ d) $k^{-n} \cdot k$	__ / 4	
2. Vereinfache: a) $(b^6 - c^6)(b^6 + c^6)$ b) $z^{n+1} \cdot z^{-n}$	__ / 2	
3. Vereinfache: a) $2^n \cdot 5^n$ b) $10^a : 5^a$ c) $g^k \cdot 3^{-k}$	__ / 3	
4. Vereinfache: a) $(x^5)^3$ b) $(z^{-2})^0$ c) $(x^{a-1})^{-3}$	__ / 3	
Themengebiet 9: Logarithmengesetze	__ / 5	
1. Vereinfache: a) $\lg a - \lg b + \lg c$ b) $-\log_a x - 2 \log_a y + \log_a z$ c) $\lg a - \frac{1}{2} \lg b + 3 \lg c$ d) $5 \log_a b + \frac{1}{2} \log_a (b+c)$ e) $\lg (ab) + \lg (a^3b)$	__ / 5	

Themengebiet 1: Terme umformen

1. Klammern vor Potenzen vor Punktrechnung vor Strichrechnung !

Erst nur die Klammern, Potenzen und Produkte vereinfachen. Keine Strichrechnung!

$$\begin{aligned}
 &= -(9x - 2) + 3x \cdot 2xy + 2x(2 - 3xy) - (x + 3)(x - 2) + (x + 3)^2 \\
 &\quad \downarrow \textcircled{A} \quad \downarrow \textcircled{B} \quad \downarrow \textcircled{C} \quad \downarrow \textcircled{D} \quad \downarrow \textcircled{E} \\
 &= -9x + 2 + 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y + 2x \cdot 2 - 2x \cdot 3xy - (x^2 - 2x + 3x - 2 \cdot 3) + x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 \\
 &= -9x + 2 + 6x^2y + 4x - 6x^2y - (x^2 + x - 6) + x^2 + 6x + 9 \\
 &= -9x + 2 + 6x^2y + 4x - 6x^2y - x^2 - x + 6 + x^2 + 6x + 9
 \end{aligned}$$

2. Summanden zusammenfassen.

Summanden zusammenfassen, bei denen gleiche Variablen in gleichen Potenzen vorkommen. Gegebenenfalls die Summanden vorher umordnen.

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{x^2 - x^2}_{=0} + \underbrace{6x + 4x - x - 9x}_{=0} + \underbrace{6x^2y - 6x^2y}_{=0} + \underbrace{9 + 6 + 2}_{=17} \\
 &= 17
 \end{aligned}$$

Regeln für die Umformung :

A) Klammerregeln

$$\begin{aligned}
 a + (b - c) &= a + b - c \\
 a - (b + c) &= a - b - c \\
 a - (b - c) &= a - b + c
 \end{aligned}$$

Beispiel: $3 + (9x - 2) = 3 + 9x - 2$

Beispiel: $3 - (9x + 2) = 3 - 9x - 2$

Beispiel: $3 - (9x - 2) = 3 - 9x + 2$

B) Gleiche Faktoren zu Potenzen

In Produkten kann man gleiche Faktoren zu Potenzen zusammenfassen.

Beispiel: $5x \cdot (-2)y \cdot x \cdot (-3)y \cdot x = 5 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = 30 x^3 y^2$

Beispiel: $3x \cdot 2xy = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y = 6 x^2 y$

C) Multiplizieren von Summen

Eine Summe wird mit einem Term multipliziert, indem man jeden Summanden mit dem Term multipliziert und die Produkte addiert. **Dabei auf die Vorzeichen achten!**

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

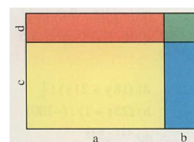
Beispiel: $2x(2+3xy) = 2x \cdot 2 + 2x \cdot 3xy$

Beispiel: $2x(2-3xy) = 2x \cdot 2 + 2x \cdot (-3)xy = 4x - 6x^2y$

Multiplikation:		
·	+	-
+	+	-
-	-	+

D) Multiplizieren von Summen mit Summen

Eine Summe wird mit einer Summe multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert und die Produkte addiert. **Dabei auf die Vorzeichen achten!**



$$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Beispiel: $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 2 \cdot 3$

Beispiel: $(x+3)(x-2) = x^2 + (-2) \cdot x + 3x + (-2) \cdot 3 = x^2 - 2x + 3x - 2 \cdot 3 = x^2 + x - 6$

E) Binomische Formeln

Binomische Formeln sind Sonderfälle von Regel D. Sie sparen aber Zeit beim Rechnen, wenn man sie auswendig kann, da man dann auf die Zwischenschritte verzichten kann.

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
 (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

Beispiel: $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

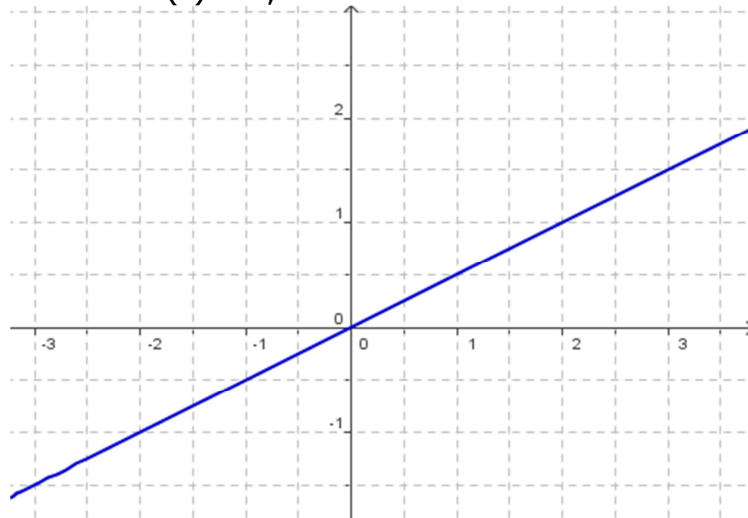
Beispiel: $(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

Beispiel: $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

Proportionale Funktionen

Funktionsgleichung: $f(x) = m \cdot x$

Graph: $f(x) = 0,5 x$

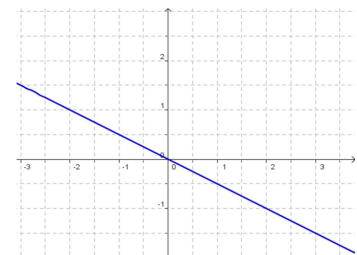


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5

Weitere Graphen:

Für negative Werte von m (d.h. $m < 0$), ist die Steigung negativ. Der Graph fällt.

Beispiel: $f(x) = -0,5x$



Eigenschaften:

- Zum Doppelten, Dreifachen, ... eines x -Wertes gehört immer das Doppelte, Dreifache, ... des zugehörigen y -Wertes.
- Zur Hälfte, einem Drittel, ... eines x -Wertes gehört immer die Hälfte, ein Drittel, ... des zugehörigen y -Wertes.
- Eine proportionale Funktion ist ein Sonderfall ($n=0$) einer linearen Funktion $f(x) = mx + n$.
- Der Funktionsgraph ist eine **Gerade**.
- Der Graph der Funktion $f(x) = mx$ geht durch den Ursprung $(0|0)$.
- Der Wert m der Funktion $f(x) = mx$ wird **Steigung** oder **Proportionalitätsfaktor** des Graphen genannt. Je größer der Betrag von m ist, desto steiler verläuft der Graph.
- Für positive Werte von m ($m > 0$) ist der Graph steigend, für negative Werte ($m < 0$) fallend.

Anwendung:

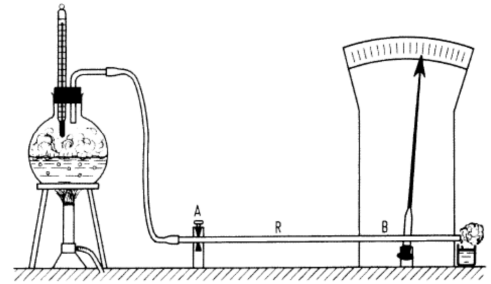
Ein Auto verbraucht 7 Liter Diesel pro 100 km. Betrachtet man den Verbrauch als Funktion der gefahrenen Strecke, so lässt sich die folgende Funktionsgleichung aufstellen:

$$\begin{aligned} \text{Verbrauch} &= 0,07 \cdot \text{Fahrtstrecke} \\ f(x) &= 0,07 \cdot x \end{aligned}$$

$\begin{aligned} \text{Verbrauch für 123 km:} \\ f(123) &= 0,07 \cdot 123 = 8,61 \text{ (Liter)} \end{aligned}$

Weitere Anwendung:

Ein Aluminiumrohr (R) von 1m Länge ist an seinem linken Ende (A) fest eingeklemmt. Das rechte Ende (B) ist so mit einem Zeiger verbunden, dass dieser jede Längenänderung des Rohres auf einer Skala vergrößert anzeigt. Durch das Rohr, das zu Beginn des Versuchs auf 0°C abgekühlt wurde, wird nun Wasser mit immer größerer Temperatur geleitet, so dass sich das Rohr ebenfalls erwärmt. Hat das Rohr jeweils die Temperatur des Wassers erreicht, wird die Verlängerung des Rohres gemessen. Die Messung ergibt die folgende Wertetabelle:



Temperatur T in °C	0	25	50	75	100
Verlängerung v in mm	0	0,6	1,2	1,8	2,4

Es ergibt sich ein proportionaler Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \text{Verlängerung} &= 0,024 \cdot \text{Temperatur} \\ f(x) &= 0,024 \cdot x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Verlängerung bei } 30^\circ\text{C} \\ f(30) &= 0,024 \cdot 30 = 0,72 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

Berechnungen:

Berechnung der Steigung m:

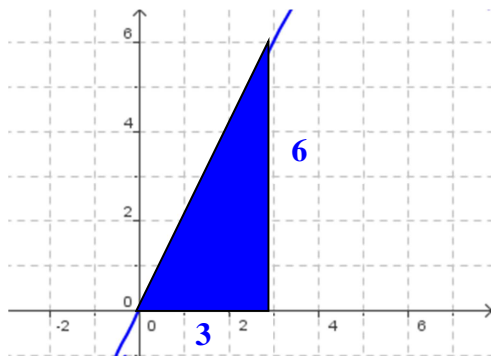
Zur Berechnung der Steigung wird ein Punkt des Graphen benötigt, jedoch nicht der Ursprung (0|0). Bezeichnet man diesen mit P (x₁|y₁), so errechnet sich die Steigung m aus der folgenden Formel:

$$P(x_1|y_1)$$

$$m = \frac{y_1}{x_1}$$

$$P(3|6)$$

$$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{6}{3} = 2$$



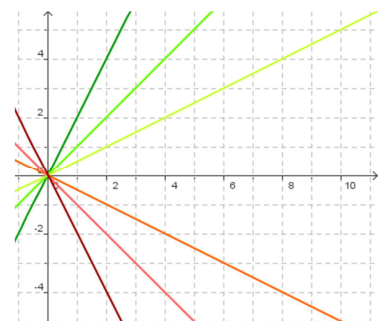
Man kann sich die Berechnung an der nebenstehenden Grafik verdeutlichen. Zeichne ein **Steigungsdreieck** in beliebiger Größe an den Graphen. Die Steigung m lässt sich wie folgt berechnen. Abfallende Geraden haben dabei eine negative Steigung.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - \text{Unterschied}}{x - \text{Unterschied}} = \frac{\text{Dreieckshöhe}}{\text{Dreiecksbreite}}$$

Steigungen:

Steigungen lassen sich zur Kontrolle abschätzen.

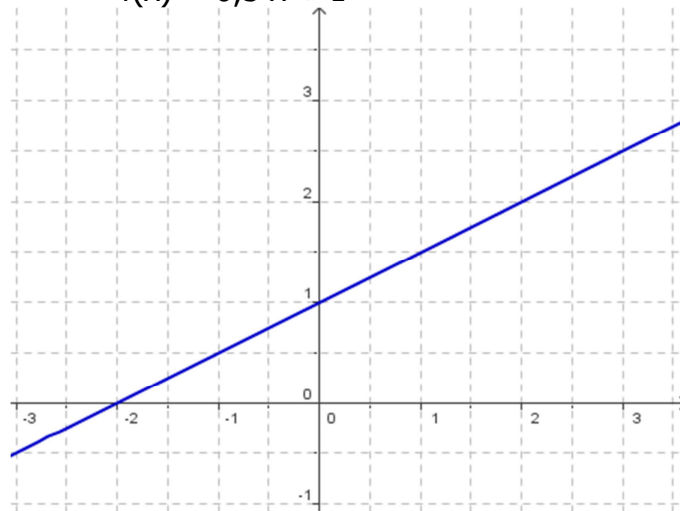
- **dunkelgrün:** Steigung > 1
- **hellgrün** (Winkelhalbierende der Achsen): Steigung = 1
- **gelb:** Steigung zwischen 0 und 1
- **schwarz** (x-Achse): Steigung = 0
- **orange:** Steigung zwischen 0 und -1
- **hellrot** (Winkelhalbierende der Achsen): Steigung = -1
- **dunkelrot:** Steigung < -1



Lineare Funktionen

Funktionsgleichung: $f(x) = m \cdot x + b$

Graph: $f(x) = 0,5x + 1$

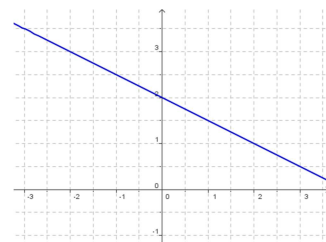


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5

Weitere Graphen:

Für negative Werte von m (d.h. $m < 0$), ist die Steigung negativ. Der Graph fällt.

Beispiel: $f(x) = -0,5x + 2$



Eigenschaften:

- Der Funktionsgraph ist eine **Gerade**.
- Der Graph der Funktion $f(x) = mx + b$ geht durch den Punkt $P(0|b)$. b wird der **y-Achsenabschnitt** genannt.
- Der Wert m der Funktion $f(x) = mx + b$ wird **Steigung** des Graphen genannt. Je größer der Betrag von m ist, desto steiler verläuft der Graph.
- Für positive Werte von m ($m > 0$) ist der Graph steigend, für negative Werte ($m < 0$) fallend.
- Der x -Wert, an dem der Graph die x -Achse schneidet, heißt **Nullstelle**.

Anwendung:

In den USA wird zur Angabe von Temperaturen nicht die bei uns gebräuchliche Celsius-Skala mit der Temperatureinheit 1°C (1 Grad Celsius), sondern die Fahrenheit-Skala mit der Temperatureinheit 1°F (1 Grad Fahrenheit) benutzt. Um den Fahrenheitwert aus dem Celsiuswert zu errechnen, kann man die folgende Formel benutzen:

$$\begin{aligned} \text{Fahrenheitwert} &= 1,8 \cdot \text{Celsiuswert} + 32 \\ f(x) &= 1,8 \cdot x + 32 \end{aligned}$$

$\begin{aligned} \text{Grad Fahrenheit bei } 25^\circ\text{C:} \\ f(25) &= 1,8 \cdot 25 + 32 = 77 \text{ (}^\circ\text{F)} \end{aligned}$

Berechnungen:

Berechnung der Steigung m:

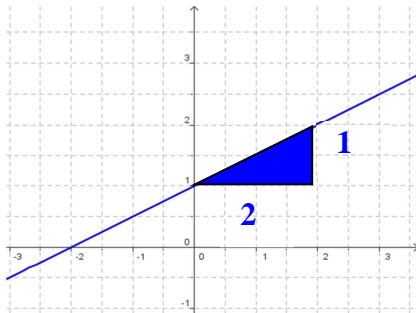
Zur Berechnung der Steigung werden zwei Punkte benötigt. Bezeichnet man diese mit $P_1 (x_1|y_1)$ und $P_2 (x_2|y_2)$, so errechnet sich die Steigung m aus der folgenden Formel:

$$P_1 (x_1|y_1), P_2 (x_2|y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$P_1 (0|2), P_2 (2|3)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{2 - 0} = \frac{1}{2} = 0,5$$



Man kann sich die Berechnung an der nebenstehenden Grafik verdeutlichen.

Zeichne ein **Steigungsdreieck** in beliebiger Größe an den Graphen. Die Steigung m lässt sich wie folgt berechnen. Abfallende Geraden haben dabei eine negative Steigung.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - \text{Unterschied}}{x - \text{Unterschied}} = \frac{\text{Dreieckshöhe}}{\text{Dreiecksbreite}}$$

Berechnung des y-Achsenabschnitts b:

Der y-Achsenabschnitt b ist der Funktionswert an der Stelle 0. Um diesen zu errechnen ist für x Null einzusetzen. Man kann ihn aber auch direkt in der Funktionsgleichung ablesen.

$$f(x) = mx + b$$

$$f(0) = m \cdot 0 + b$$

$$f(0) = b$$

$$f(x) = 4x + 8$$

$$f(0) = 4 \cdot 0 + 8$$

$$f(0) = 8$$

Berechnung der Nullstelle:

An der Nullstelle ist der Funktionswert 0. Zur Berechnung der Nullstelle wird daher der Funktionswert Null gesetzt. Anschließend wird nach x aufgelöst. Man erhält die Nullstelle.

$$f(x) = mx + b$$

$$0 = mx + b \quad | -b$$

$$-b = mx \quad | :m$$

$$-\frac{b}{m} = x$$

$$f(x) = 4x + 8$$

$$0 = 4x + 8 \quad | -8$$

$$-8 = 4x \quad | :4$$

$$-2 = x$$

Ermitteln der Funktionsgleichung aus einem Graphen:

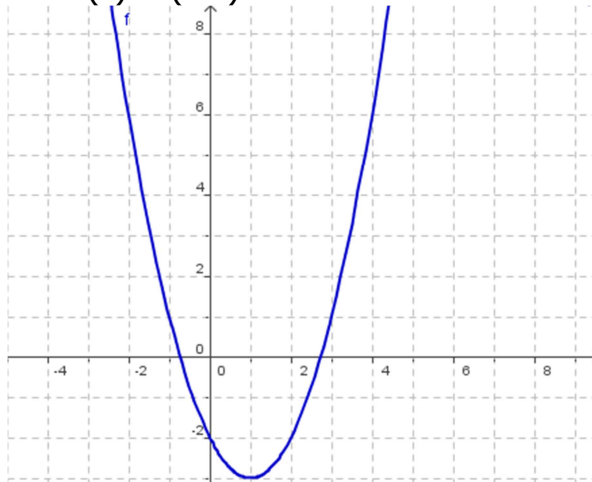
Berechne die Steigung m mit Hilfe eines Steigungsdreiecks wie oben beschrieben. Der y-Achsenabschnitt b lässt sich als Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse ablesen. Die gefundenen Werte für m und n in die Funktionsgleichung $f(x)=mx+b$ einsetzen.

Quadratische Funktionen

Funktionsgleichung: $f(x) = a(x-d)^2 + e$ bzw. $f(x) = ax^2 + bx + c$

Graph:

$$f(x) = (x-1)^2 - 3$$

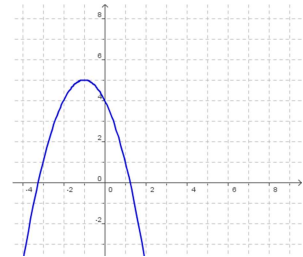


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	13	6	1	-2	-3	-2	1

Weitere Graphen:

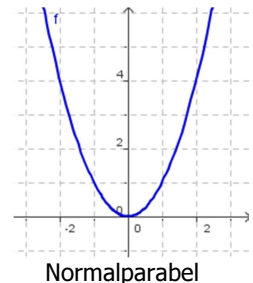
Für negative Werte von a (d.h. $a < 0$), ist die Graph nach unten geöffnet.

Beispiel: $f(x) = -(x+1)^2 + 5$



Eigenschaften:

- Der Graph einer Funktion $f(x) = a(x-d)^2 + e$ heißt **Parabel**.
Für $f(x) = x^2$ heißt der Graph **Normalparabel**.
- Für die Normalparabel gilt:
 - o Sie verläuft oberhalb der x-Achse
 - o Sie ist symmetrisch zur y-Achse
 - o Der Punkt $S(0|0)$ ist der „tiefste“ Punkt, er heißt **Scheitelpunkt**.
- Der Graph einer Funktion $f(x) = (x-d)^2 + e$, (d.h. $a=1$) entspricht einer verschobenen Normalparabel. Dabei liegt der Scheitelpunkt bei $(d|e)$.
- Die Form und Lage des Graphen kann man wie folgt ablesen:



$$f(x) = a(x-d)^2 + e$$

a: Faktor für Öffnungsrichtung und Streckung der Parabel:

$|a| < 1$: Die Parabel ist weiter als die Normalparabel

$a = 1$: Normalparabel

$|a| > 1$: Die Parabel ist enger als die Normalparabel

$a > 0$: Parabel nach oben geöffnet, $a < 0$: Parabel nach unten geöffnet

↔ **d:** Verschiebung nach recht/links ($x-d$: d nach rechts, $x+d$: d nach links)

↑ **e:** Verschiebung nach oben/unten ($e > 0$: nach oben, $e < 0$: nach unten)

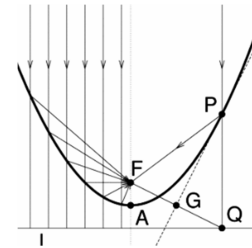
Beispiele:

Funktion	a	x-d	e	Scheitelpunkt	Öffnung	Streckung
x^2	1	x	0	(0 0)	nach oben	Normalparabel
$x^2 + 3$	1	x	3	(0 3)	nach oben	Normalparabel
$(x+4)^2+3$	1	x+4	3	(-4 3)	nach oben	Normalparabel
$(x-4)^2-3$	1	x-4	-3	(4 -3)	nach oben	Normalparabel
$-(x-4)^2+5$	-1	x-4	+5	(4 5)	nach unten	Normalparabel
$-2(x-4)^2-3$	-2	x-4	-3	(4 -3)	nach unten	enger
$-0,2(x-4)^2-3$	-0,2	x-4	-3	(4 -3)	nach unten	weiter
$0,5(x-4)^2-3$	0,5	x-4	-3	(4 -3)	nach oben	weiter

Anwendung:

Jeder Hohlspiegel oder Autoscheinwerfer entspricht dem Graph einer quadratischen Funktion. Alle parallel auftreffenden Lichtstrahlen werden in einen gemeinsamen Schnittpunkt (Brennpunkt) reflektiert.

Darüber hinaus entsprechen Flugkurven von geworfenen Gegenständen, z.B. beim Speerwurf in der Leichtathletik nach unten offenen Parabeln.



Berechnungen:

Quadratische Ergänzung:

Die Form $f(x) = (x-d)^2 + e$ heißt **Scheitelpunktsform**, da sich der Scheitelpunkt direkt ablesen lässt: **S (d | e)**. Die Form $f(x) = x^2 + bx + c$ heißt **Normalform** und lässt sich mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktsform umformen.

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 6x + 7 \\
 = & x^2 + 6x \quad + 9 \quad - 9 \quad + 7 \\
 & \quad \quad \quad \begin{array}{c} :2 \downarrow \\ \text{---} \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \\
 & \quad \quad \quad \text{Binomische Formel} \quad \quad \quad \text{Rest} \\
 = & (x + 3)^2 - 2
 \end{aligned}$$

Betrachte die binomische Formel

$$(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$$

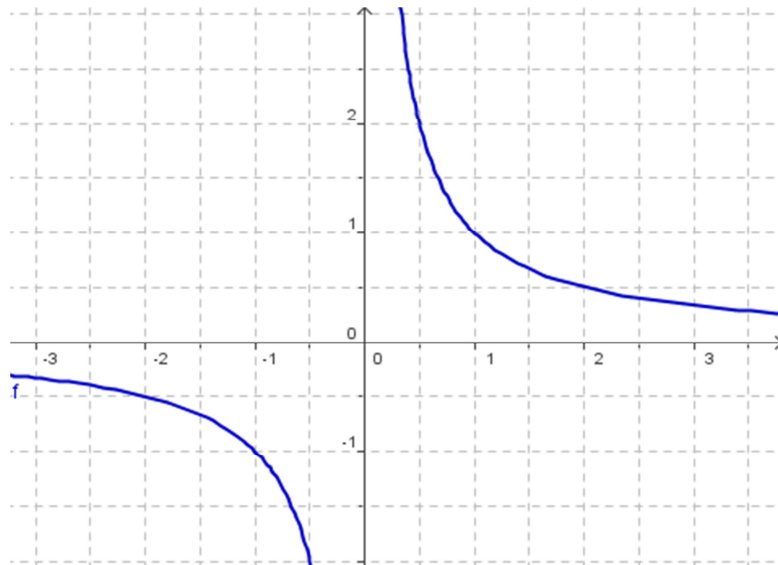
Man erhält aus der Funktion $x^2 + 6x + 7$ den Wert für **d**, indem man den Faktor vor dem x (also die 6) durch 2 dividiert (6:2=3).

Um eine binomische Formel zu erhalten, muss mit **d**² ergänzt werden. In dem Beispiel wird somit die 9 (=3²) ergänzt. Damit die Gleichung weiterhin stimmt, wird die 9 aber anschließend sofort wieder subtrahiert. Die ersten drei Summanden entsprechen dann einer binomischen Formel.

Antiproportionale Funktionen

Funktionsgleichung: $f(x) = a \cdot \frac{1}{x}$

Graph: $f(x) = \frac{1}{x}$

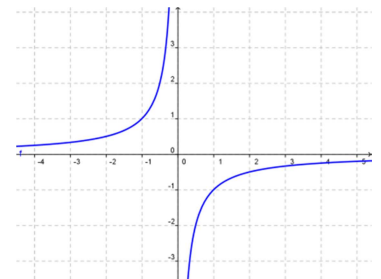


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-0,33	-0,5	-1	nicht def.	1	0,5	0,33

Weitere Graphen:

Für negative Werte von a (d.h. $a < 0$) ist der Graph spiegelbildlich zur x -Achse.

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{x}$



Eigenschaften:

- Zum Doppelten, Dreifachen, ... eines x -Wertes gehört immer die Hälfte, ein Drittel, ... des zugehörigen y -Wertes.
- Zur Hälfte, einem Drittel, ... eines x -Wertes gehört immer das Doppelte, das Dreifache, ... des zugehörigen y -Wertes.
- Die Zahlenpaare sind produktgleich, d.h. $y \cdot x = \text{konst.}$
- Der Graph ist für $x=0$ nicht definiert, da in diesem Fall der Nenner des Bruchs Null ist.
- Der Graph einer antiproportionalen Funktion ist eine **Hyperbel**.

Anwendung:

Beispiel: Mit einer Futtertüte kommt man für 8 Wellensittiche 24 Tage aus. Wie lange kommt man aus, wenn man 6 Wellensittiche zu füttern hat?

Die Lösung kann mittels Dreisatz berechnet werden:

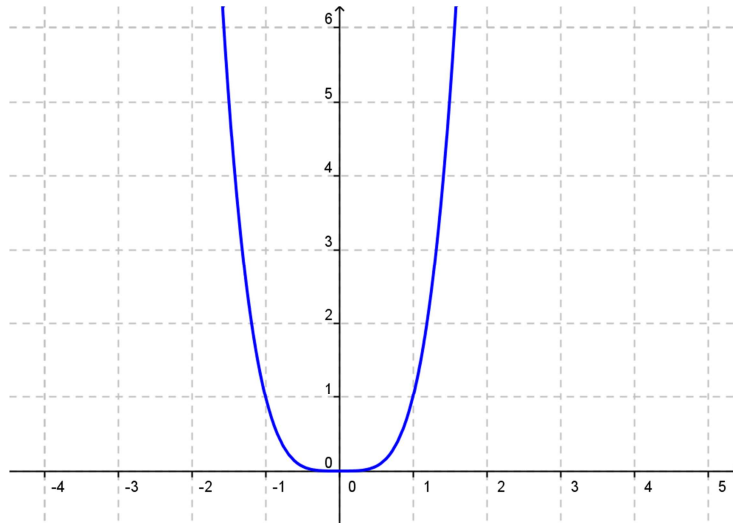
1. Satz: Was wissen wir?
 $8 \text{ Wellensittiche} \cdot 24 \text{ Tage}$
 $: 8 \left(\right) \cdot 8$
2. Satz: Schluss auf die Einheit
 $1 \text{ Wellensittich} \cdot 192 \text{ Tage}$
 $\cdot 6 \left(\right) : 6$
3. Satz: Schluss auf das Vielfache
 $6 \text{ Wellensittiche} \cdot 32 \text{ Tage}$

Bei 6 Wellensittichen kommt man mit der Futtertüte 32 Tage aus.

Potenzfunktionen

Funktionsgleichung: $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) und $f(x) = x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Graph: $f(x) = x^4$

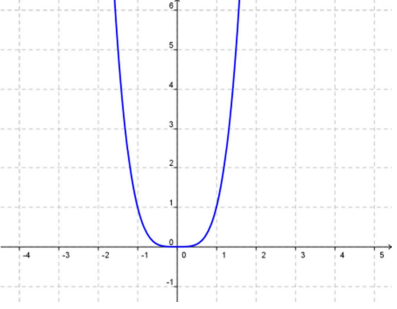
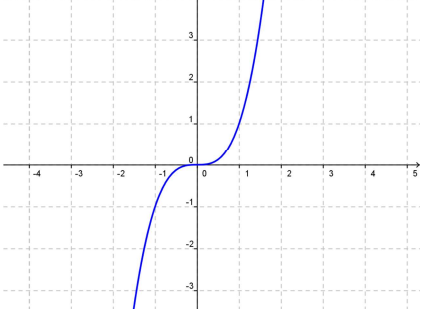
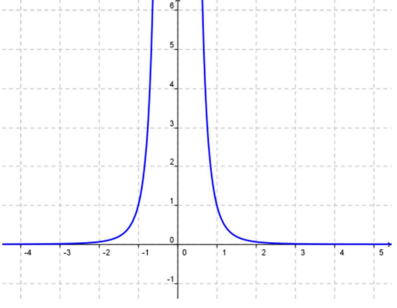
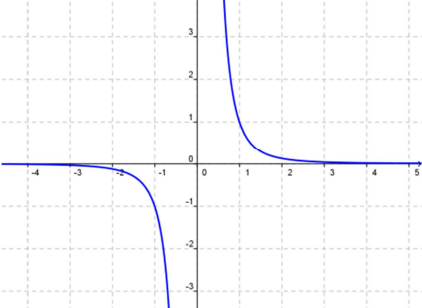


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	81	16	1	0	1	16	81

Sonderfälle:

$n = 1$: $f(x) = x$ Proportionale Funktion
 $n = 2$: $f(x) = x^2$ Quadratische Funktion
 $n = -1$: $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ Antiproportionale Funktion

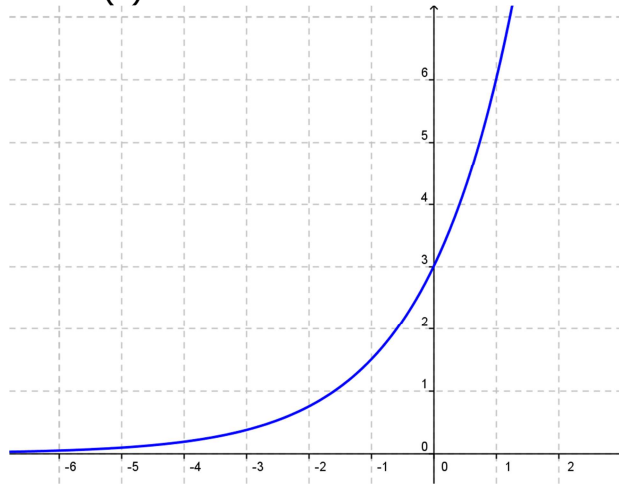
Weitere Graphen / Eigenschaften:

		n gerade	n ungerade
		<p>Symmetrie: Achsensymmetrie zur y-Achse</p> <p>Wertebereich: $W = \mathbb{R}^+$</p>	<p>Symmetrie: Punktsymmetrie zum Ursprung</p> <p>Wertebereich: $W = \mathbb{R}$</p>
n > 0	<p>Parabel (n-ter Ordnung)</p> <p>Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$</p>	 <p>Punkte: $(-1 1), (0 0), (1 1)$</p>	 <p>Punkte: $(-1 -1), (0 0), (1 1)$</p>
n < 0	<p>Hyperbel (n-ter Ordnung)</p> <p>Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$</p>	 <p>Punkte: $(-1 1), (1 1)$</p>	 <p>Punkte: $(-1 -1), (1 1)$</p>

Exponentialfunktion

Funktionsgleichung: $f(x) = b \cdot a^x$

Graph: $f(x) = 3 \cdot 2^x$

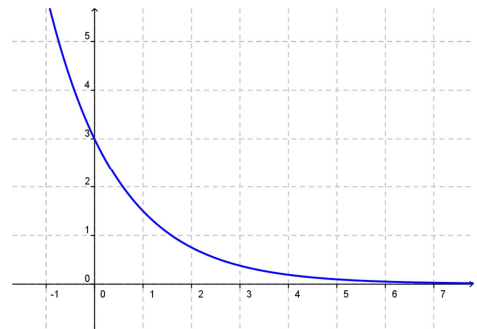


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	0,375	0,75	1,5	3	6	12	24

Weitere Graphen:

Für Werte von a mit $0 < a < 1$ ist der Graph streng monoton fallend.

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot 0,5^x$



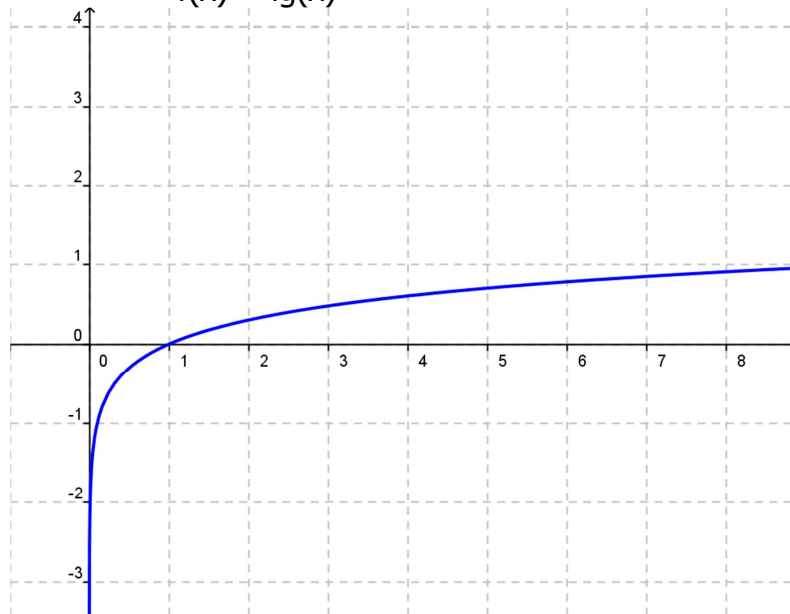
Eigenschaften:

- Die Funktion beschreibt ein Wachstum um einen konstanten Prozentsatz $p\%$.
- b bezeichnet den **Anfangswert**.
- $a = (1 + \frac{p}{100})$ bezeichnet man als **Wachstumsfaktor**.
- $f(x) > 0$
- die x -Achse ist **Asymptote**
- der Graph geht durch $(0|1)$ und $(1|a)$
- für $a > 1$ ist der Graph streng monoton steigend
- für $0 < a < 1$ ist der Graph streng monoton fallend
- Die Graphen von a^x und $(\frac{1}{a})^x$ sind symmetrisch bzgl. der y -Achse.

Logarithmusfunktion

Funktionsgleichung: $f(x) = \log_n(x)$ bzw. $f(x) = \lg(x)$

Graph: $f(x) = \lg(x)$

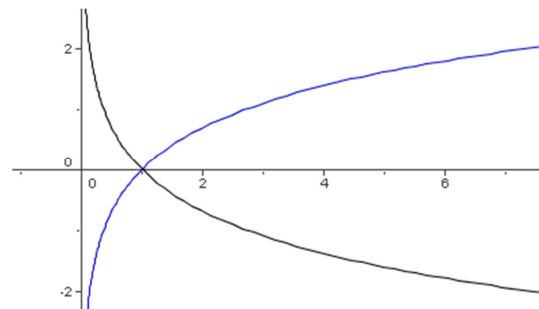


x	0	1	2	3	10	100	1000
f(x)	-	0	0,3010	0,4771	1	2	3

Weitere Graphen:

Ist $0 < a < 1$, so ist der Graph streng monoton fallend.

Beispiel: $f(x) = \log_{0,5}(x)$



Eigenschaften:

- Der Graph geht durch $(1|0)$ und $(a|1)$
- Ist $a > 1$, so ist der Graph streng monoton steigend
- Ist $0 < a < 1$, so ist der Graph streng monoton fallend.

$$a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_a(a^x) = x$$

Äquivalente exponentielle und logarithmische Gleichung:

$$1000 = 10^3 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

Exponent
Basis

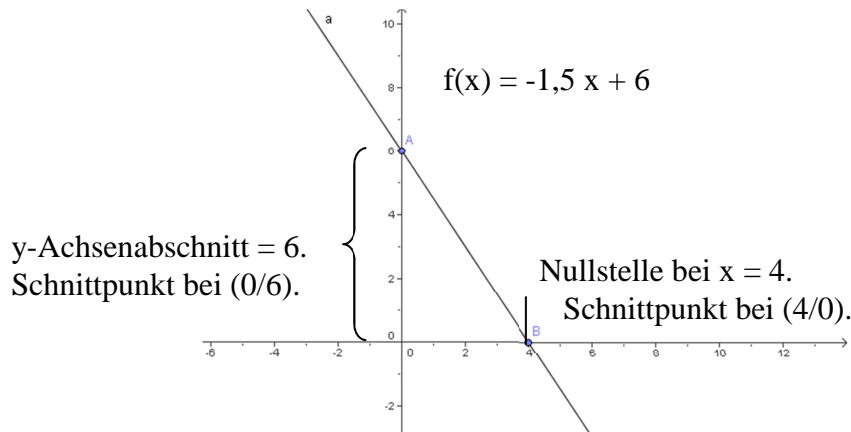
$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a x \quad \text{für } a > 0, a \neq 1$$

Berechnung von Logarithmen:

Die Berechnung von Logarithmen mit verschiedener Basis lässt sich für die Berechnung mit dem Taschenrechner auf Logarithmen zur Basis 10 zurückführen:

$$\log_a(x) = \frac{\lg(x)}{\lg(a)}$$

Schnittpunkte mit den Achsen



Schnittpunkt mit der y-Achse:

Die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse heißt **y-Achsenabschnitt des Graphen**.

Proportionale Funktionen $f(x) = mx$ (bzw. $y = mx$)	Lineare Funktionen $f(x) = mx + b$ (bzw. $y = mx + b$)
Der Graph geht durch den Ursprung (0/0). Der y-Achsenabschnitt ist somit gleich 0 und der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei (0/0).	Für den Schnittpunkt mit der y-Achse gilt: $x=0$. <u>Berechne:</u> $f(0)$. Man erhält $f(0) = b$. Der y-Achsenabschnitt ist n. Der Graph schneidet die y-Achse bei (0/b).

Schnittpunkt mit der x-Achse:

Die x-Koordinate des Schnittpunkts mit der x-Achse heißt **Nullstelle der Funktion f**.

Proportionale Funktionen $f(x) = mx$ (bzw. $y = mx$)	Lineare Funktionen $f(x) = mx + b$ (bzw. $y = mx + b$)
Der Graph geht durch den Ursprung (0/0). Die Nullstelle ist somit bei $x = 0$ und der Schnittpunkt mit der x-Achse liegt bei (0/0).	Für den Schnittpunkt mit der x-Achse gilt: $y=0$. <u>Berechne:</u> $0 = mx + b$ Auflösen der Gleichung nach x. <u>Beispiel:</u> $f(x) = 4x - 8$ Berechnen der Nullstelle: Setze $f(x) = 0$ bzw. $y = 0$. $0 = 4x - 8 \quad +8$ $8 = 4x \quad \quad : 4$ $2 = x$ Die Nullstelle der Funktion $f(x)$ ist bei $x = 2$. Der Graph schneidet die x-Achse somit im Punkt (2/0).

Hinweis:

Bei der **Nullstelle** handelt es sich nur um die x-Koordinate, z.B. $x = 5$.

Bei der Angabe eines **Schnittpunktes** sind beide Koordinaten anzugeben: Schnittpunkt S(5/0).

Lineare Gleichungssysteme

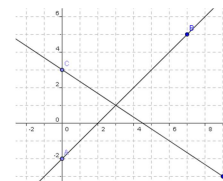
Eine Gleichung der Form $ax + by = c$ heißt **lineare Gleichung mit zwei Variablen** (z.B.: $-2x + 4y = 18$). Sie hat unendlich viele Lösungen (Zahlenpaare $(x|y)$, die die Gleichung erfüllen). Die Lösungen lassen sich als Gerade darstellen.

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen heißen **lineares Gleichungssystem**. Die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen heißen **Lösungen des linearen Gleichungssystems**.

Da die Lösungsmenge einer linearen Gleichung $ax + by = c$ eine Gerade ist, kann ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I:} & \quad a_1 x + b_1 y = c_1 \\ \text{II:} & \quad a_2 x + b_2 y = c_2 \end{aligned}$$

- genau eine Lösung (Lösungsgeraden schneiden sich),
- keine Lösung (Lösungsgeraden sind parallel) oder
- unendlich viele Lösungen (Lösungsgeraden sind identisch) haben.



Um die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems zu ermitteln, kann man folgende Verfahren nutzen.

Gleichungssystem I: $18 + 2x = 4y$ II: $4y + 4 = 4x$		
Gleichsetzungsverfahren	Einsetzungsverfahren	Additionsverfahren
Strategie: Versuche eine oder beide Gleichungen so umzuformen, dass bei beiden Gleichungen jeweils einmal dieselbe Seite vorkommt.	Strategie: Versuche eine Gleichung nach x oder y aufzulösen.	Strategie: Versuche die beiden Gleichungen so umzuformen, dass bei einer Addition der Gleichungen eine Variable wegfällt.
I: $18 + 2x = 4y$ II: $4y + 4 = 4x \quad - 4$ II': $4y = 4x - 4$	I: $18 + 2x = 4y$ II: $4y + 4 = 4x \quad :4$ II': $y + 1 = x$	I: $18 + 2x = 4y$ II: $4y + 4 = 4x \quad - 4y$ II': $4 = 4x - 4y$
Strategie: Man kann die jeweils anderen Seiten der beiden Gleichungen gleichsetzen . Man erhält eine Gleichung, in der nur noch eine Variable vorkommt. Für diese kann der Wert ausgerechnet werden.	Strategie: Man kann den ermittelten Term für x bzw. y in die andere Gleichung einsetzen . Man erhält eine Gleichung, in der nur noch eine Variable vorkommt. Für diese kann der Wert ausgerechnet werden.	Strategie: Man addiert die (Vielfachen der) Gleichungen, so dass eine der Variablen wegfällt. Man erhält eine Gleichung, in der nur noch eine Variable vorkommt. Für diese kann der Wert ausgerechnet werden.
Gleichsetzen: $18 + 2x = 4y = 4x - 4$ $18 + 2x = 4x - 4 \quad + 4$ $22 + 2x = 4x \quad - 2x$ $22 = 2x \quad :2$ 11 = x	Einsetzen: $y + 1 = x$ in I: <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px;">Klammer setzen!</div> $18 + 2x = 4y \quad \cdot T$ $18 + 2(y + 1) = 4y \quad T$ $20 + 2y = 4y \quad - 2y$ $20 = 2y \quad :2$ 10 = y	Addieren: $18 + 2x = 4y$ $4 = 4x - 4y$ <hr style="width: 100%; border: 0.5px dashed black;"/> $22 + 2x = 4x \quad - 2x$ $22 = 2x \quad :2$ 11 = x
Strategie: Den errechneten Wert in eine der beiden Gleichungen einsetzen.		
<u>Einsetzen ($x = 11$) in Gleichung I:</u> $18 + 2x = 4y$ $18 + 2 \cdot 11 = 4y \quad T$ $40 = 4y \quad :4$ 10 = y	<u>Einsetzen ($y = 10$) in I:</u> $18 + 2x = 4y$ $18 + 2x = 4 \cdot 10 \quad -18$ $2x = 22 \quad :2$ x = 11	<u>Einsetzen ($x = 11$) in Gleichung I:</u> $18 + 2x = 4y$ $18 + 2 \cdot 11 = 4y \quad T$ $40 = 4y \quad :4$ 10 = y
⇒ Schnittpunkt S (11 10) bzw. $L = \{(11 10)\}$		

Bestimme zeichnerisch die Lösung des Gleichungssystems

I: $2x + 3y = 9$

II: $x - y = 2$

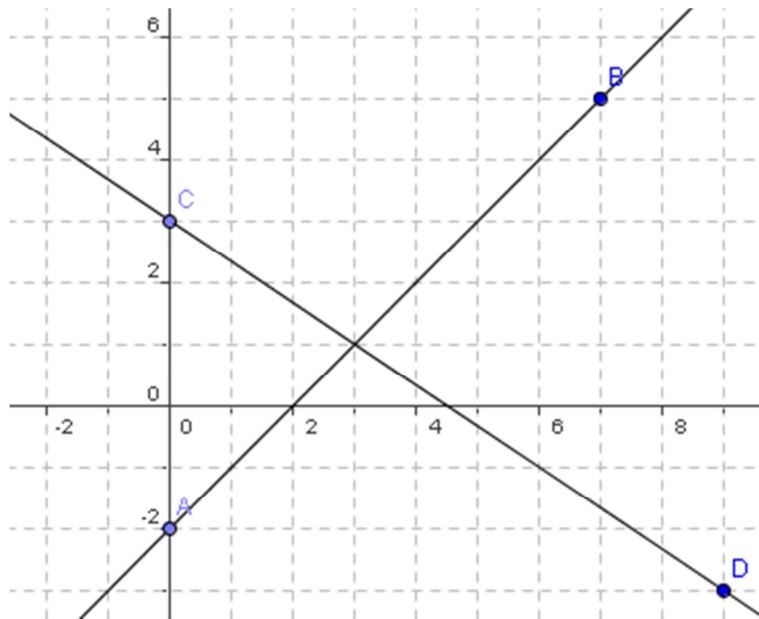
1. Schritt : Gib für jede der beiden Gleichungen die Gerade an, auf der die Lösungen liegen.

Gleichung I: $2x + 3y = 9 \quad | - 2x$
 $3y = -2x + 9 \quad | : 3$
 $y = -\frac{2}{3}x + 3$

Gleichung II: $x - y = 2 \quad | - x$
 $-y = -x + 2 \quad | \cdot (-1)$
 $y = x - 2$

Die beiden Geraden kann man auch ohne Umformen direkt angeben, da man weiß, dass die Lösungsmenge der linearen Gleichung $ax + by = c$ eine Gerade der Form $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ ist.

2. Zeichne die beiden Geraden ein.



3. Betrachte die beiden Geraden

Haben die beiden Geraden einen Schnittpunkt, so ist dieser die Lösung des linearen Gleichungssystems. (In diesem Fall (3|1)).

Sind die Geraden parallel, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Liegen die beiden Geraden aufeinander, sind also identisch, so hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösung, nämlich alle Punkte dieser Geraden.

Rechengesetze

Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativgesetz:

$$a + (b+c) = (a+b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b+c) = ab + ac$$
$$(a+b) \cdot c = ac + bc$$

Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Potenzen:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (n-mal)}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Potenzieren von Potenzen:

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Wurzeln:

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Wurzelgesetze:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$
$$\sqrt[m]{a^{rm}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Logarithmengesetze:

Berechnung von Logarithmen:

Die Berechnung von Logarithmen mit verschiedener Basis lässt sich für die Berechnung mit dem Taschenrechner auf Logarithmen zur Basis 10 zurückführen:

$$\log_a(x) = \frac{\lg(x)}{\lg(a)}$$

Für $u, v > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ gilt:

Produktregel: $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

Quotientenregel: $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$

Potenzregel: $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$

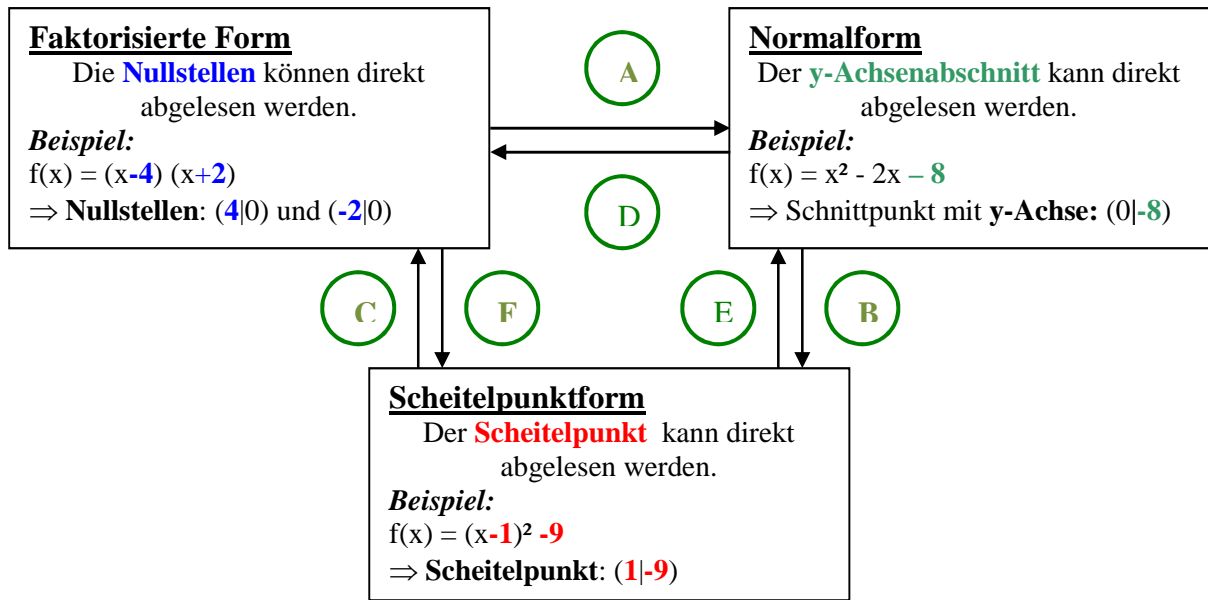
PQ und ABC-Formel:

Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit Hilfe der **ABC-Formel**:

$$x_{N1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = x^2 + px + q$ mit Hilfe der **PQ-Formel**:

$$x_{N1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$



<p>Faktorierte Form \rightarrow Normalform</p> <p><i>Ausmultiplizieren</i></p> $(x-4)(x+2)$ $= x^2 + 2x - 4x - 8$ $= x^2 - 2x - 8$	<div style="border: 1px solid green; border-radius: 50%; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">A</div>	<p>Normalform \rightarrow Faktorierte Form</p> <p><i>pq-Formel</i></p> $x^2 - 2x - 8 \Rightarrow p = -2, q = -8$ <div style="border: 2px solid red; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ </div> $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 + \sqrt{1^2 - (-8)} = 4$ $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 - \sqrt{1^2 - (-8)} = -2$ $\Rightarrow f(x) = (x-4)(x+2)$	<div style="border: 1px solid green; border-radius: 50%; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">B</div>
<p>Normalform \rightarrow Scheitelpunktform</p> <p><i>Quadratische Ergänzung</i></p> $x^2 - 2x - 8$ $= x^2 - 2x \quad +1 \quad -1 \quad - 8$ <p style="margin-left: 40px;">:2 \rightarrow 1 \uparrow (\quad)²</p> <p style="margin-left: 40px;"> Binomische Formel Rest </p> $= (x-1)^2 - 9$	<div style="border: 1px solid green; border-radius: 50%; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">C</div>	<p>Scheitelpunktform \rightarrow Normalform</p> <p><i>Ausmultiplizieren</i></p> $(x-1)^2 - 9$ $= x^2 - 2x + 1 - 9$ $\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 8$	<div style="border: 1px solid green; border-radius: 50%; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">D</div>
<p>Scheitelpunktform \rightarrow Faktorierte Form</p> <p><i>Nullstellen berechnen</i></p> $(x-1)^2 - 9 = 0 \quad +9$ $(x-1)^2 = 9 \quad \sqrt{\quad}$ $x-1 = 3 \quad \text{und} \quad x-1 = -3 \quad +1$ $x_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$ $\Rightarrow f(x) = (x-4)(x+2)$	<div style="border: 1px solid green; border-radius: 50%; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">E</div>	<p>Faktorierte Form \rightarrow Scheitelpunktform</p> <p><i>Scheitelpunkt berechnen</i></p> $f(x) = (x-4)(x+2)$ \Rightarrow Nullstellen: (4 0) und (-2 0) Der Scheitelpunkt liegt aufgrund der Symmetrie in der Mitte der beiden Nullstellen. $\Rightarrow x_s = \frac{\text{Nullstelle}_1 + \text{Nullstelle}_2}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$ <p>Funktionswert an dieser Stelle berechnen:</p> $f(1) = (1-4)(1+2) = -3 \cdot 3 = -9$ \Rightarrow Scheitelpunkt bei (1 -9) $\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 - 9$	<div style="border: 1px solid green; border-radius: 50%; width: 40px; height: 40px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;">F</div>