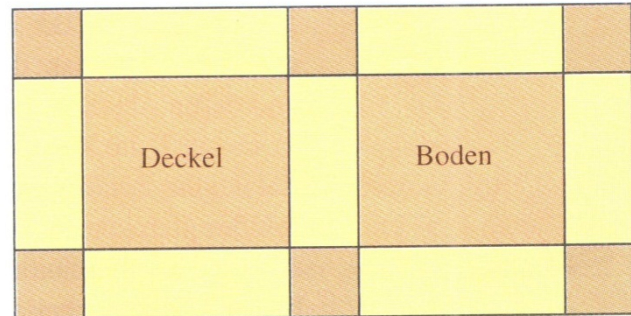


Stufe I – Problem 1

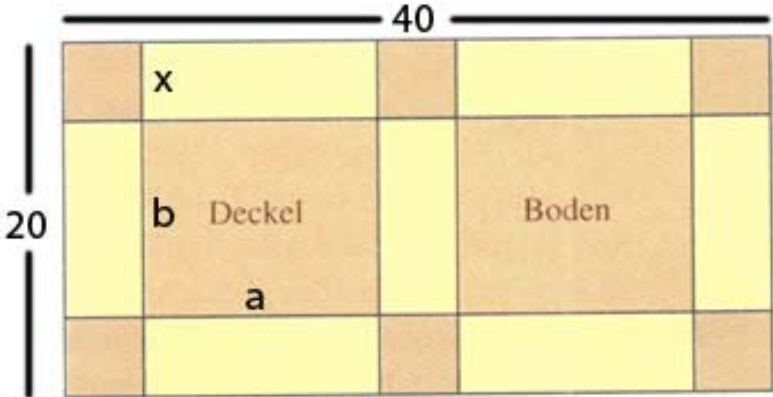
Ein Kistenproblem

Aus einem 40cm langen und 20cm breiten Karton soll durch Herausschneiden von 6 Quadraten eine Schachtel hergestellt werden, deren Deckel auf 3 Seiten übergreift.

Wie groß sind die Quadrate zu wählen, damit das Volumen der Schachtel möglichst groß wird?



Stufe I - Problem 1 - Ein Kistenproblem



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe I - Problem 1 - Ein Kistenproblem

Hauptbedingung

$$V(a, b, x) = a \cdot b \cdot x$$

Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 2a + 3x = 40 & \rightarrow \quad a = 20 - \frac{3}{2}x \\ (2) \quad b + 2x = 20 & \rightarrow \quad b = 20 - 2x \end{array}$$

Defintionsbereich:

$$0 < x < 10 \text{ (wg. 2. Nebenbedingung)}$$

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe I - Problem 1 - Ein Kistenproblem

Zielfunktion

$$V(x) = 3x^3 - 70x^2 + 400x$$

Extremstellen für: $x_1 \approx 3,77$ und $x_2 = 11,78$ ($x_2 \notin \mathbb{D}_V$)

$V(x)$ besitzt einen Hochpunkt bei $(3,77|673,8)$.

Antwort

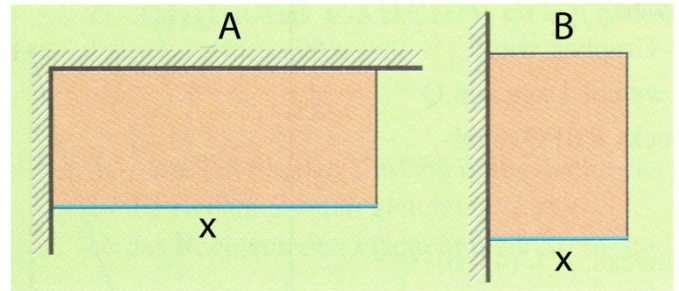
Die Quadrate müssen eine Seitenlänge von 3,77cm haben. Damit hat die Box die Maße 14,35cm x 12,46 cm x 3,77cm mit einem Volumen von 673,8cm³.

Stufe I – Problem 2

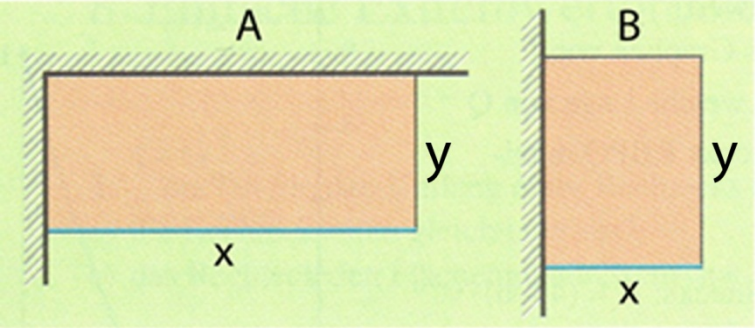
Zaunbau auf dem Hühnerhof

Mit einem Zaun der Länge 100m soll ein rechteckiger Hühnerhof mit möglichst großem Flächeninhalt eingezäunt werden. Bestimme in den beiden Fällen die Breite x des Hühnerhofs.

Wie groß ist jeweils die maximale Fläche?



Stufe I - Problem 2 - Zaunbau auf dem Hühnerhof



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe I - Problem 2 - Zaunbau auf dem Hühnerhof

Hauptbedingung

$$A(x, y) = x \cdot y$$

Nebenbedingungen

Wird durch die Drahtlänge 100m vorgegeben.

$$\text{Fall A: } U(x, y) = x + y \stackrel{\text{def}}{=} 100 \quad \rightarrow \quad y = 100 - x \quad \text{gilt für } 0 < x < 100$$

$$\text{Fall B: } U(x, y) = 2x + y \stackrel{\text{def}}{=} 100 \quad \rightarrow \quad y = 100 - 2x \quad \text{gilt für } 0 < x < 50$$

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe I - Problem 2 - Zaunbau auf dem Hühnerhof

Fall A

Zielfunktion

$A(x) = 100x - x^2$ besitzt ein Maximum für $x = 50$

Antwort

Bei einer Breite von $x = 50m$ und einer Länge von $y = 50m$ besitzt der Hühnerhof eine maximale Fläche von $2500m^2$.

Fall B

Zielfunktion

$A(x) = 100x - 2x^2$ besitzt ein Maximum für $x = 25$

Antwort

Bei einer Breite von $x = 25m$ und einer Länge von $y = 50m$ besitzt der Hühnerhof eine maximale Fläche von $1250m^2$.

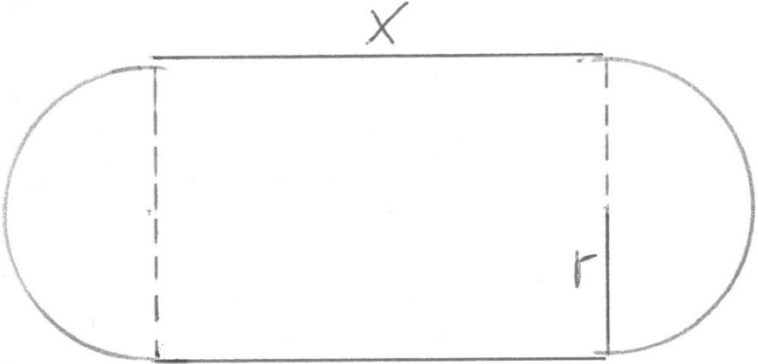
Stufe I – Problem 3

Bauvorschlag für eine Radrennbahn

Eine Radrennbahn soll neu gebaut werden. Die Bahn mit einer Länge von 500m beschreibe zwei kongruente Halbkreise, die durch zwei gleich lange, zueinander parallele Strecken miteinander verbunden sind.

Unterbreitet einen Bauvorschlag, der eine möglichst große Nutzfläche zwischen den Parallelen der Bahn für Veranstaltungen bzw. Fahrerlager zulässt.

Stufe I - Problem 3 - Bauvorschlag für eine Radrennbahn



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe I - Problem 3 - Bauvorschlag für eine Radrennbahn

Hauptbedingung

$$A(x, r) = A_{\text{Rechteck}} = x \cdot 2r$$

Nebenbedingung

(Umfang der Radrennbahn ist 500m)

$$U(x, r) = 2x + 2\pi r \stackrel{\text{def}}{=} 500 \quad \rightarrow \quad x = 250 - \pi r \quad \text{gilt für } 0 < r < \frac{250}{\pi}$$

(Anmerkung: Alternativ kann natürlich auch nach r aufgelöst werden.)

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe I - Problem 3 - Bauvorschlag für eine Radrennbahn

Zielfunktion

$A(r) = 500r - 2\pi r^2$ besitzt ein Maximum für $r = \frac{125}{\pi}$

Antwort

Bei einem Radius von $r \approx 39,79m$ und einer Länge von $x = 125m$ besitzt die rechteckige Innenfläche eine maximale Fläche von ca. $9948m^2$.

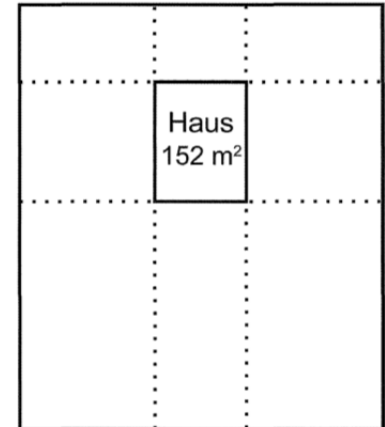
Stufe I – Problem 4

Traumgrundstück

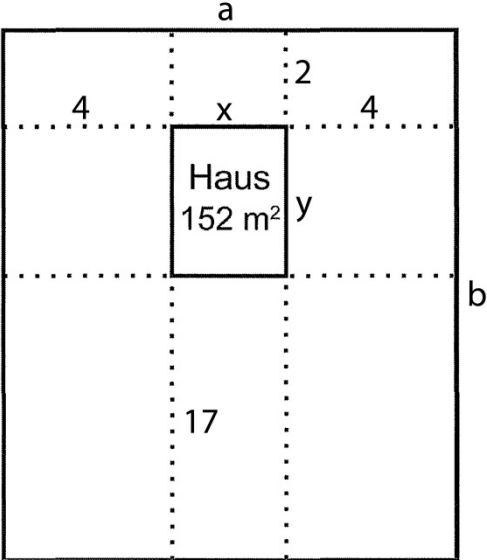
Claudia und Frank Lustig wollen sich ihr Traumhaus bauen. Sie haben lange gespart, einen günstigen Kredit erhalten und schon einen Grundriss für ihr Haus entworfen. Dieses Traumhaus soll eine rechteckige Grundfläche von 152 m^2 besitzen.

Nun müssen sie noch das passende, preisgünstigste Grundstück dafür finden. Dabei haben sie folgende Wünsche:

- Der Vorgarten soll 2 m breit sein.
- Aus rechtlichen Gründen müssen sie zu den (seitlichen) Nachbargrundstücken jeweils einen Abstand von 4m einhalten.
- Der Garten hinter dem Haus soll nach Claudias Vorstellungen 17 m lang sein.



Stufe I - Problem 4 - Traumgrundstück



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe I - Problem 4 - Traumgrundstück

Hauptbedingung

$$A(a, b) = a \cdot b$$

Nebenbedingungen

(Grundfläche des geplanten Hauses)

$$x \cdot y = 152 \quad \rightarrow \quad y = \frac{152}{x} \quad (*)$$

(Wünsche der Lustigs)

$$b = 19 + y \quad \rightarrow \quad \text{mit } (*) \quad b = 19 + \frac{152}{x}$$

$$a = 8 + x$$

gilt für $x \in \mathbb{R}^+$

gilt für $x \in \mathbb{R}^+$

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe I - Problem 4 - Traumgrundstück

Zielfunktion

$$A(x) = \frac{1216}{x} + 19x + 304$$

besitzt ein Minimum für $x = 8$

Antwort

Das geplante Haus sollte 8m breit und 19m lang sein. Das Traumgrundstück sollte damit mindestens 16m breit und 38m lang sein (minimale Fläche 608m²).

Stufe II – Problem 1

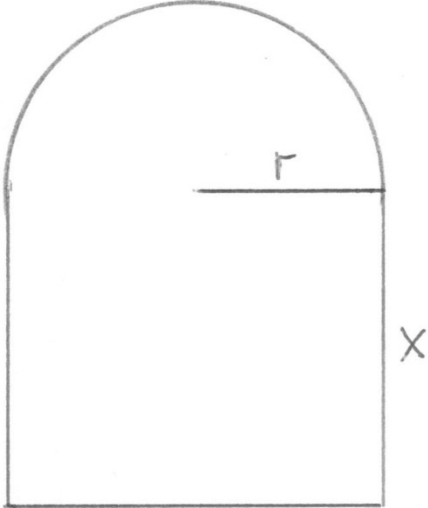
Das Restaurierungsproblem

In einem historischen Gebäude sollen wieder Fenster in der ursprünglichen Form eingesetzt werden. Diese hatten die Form eines Rechteckes mit oben aufgesetztem Halbkreis. Nach alten Unterlagen betrug der Umfang eines Fensters 6 m, für die beiden Fensterteile wurden verschiedene Glassorten verwendet. Man stellt fest, dass das Glas, das im rechteckigen Fensterteil verwendet worden war, 10 % des Lichtes, das Glas im Halbkreis dagegen 35 % absorbiert.

Wie könnten die Maße des Fensters gewählt werden, damit ein möglichst großer Lichteinfall erreicht werden kann?



Stufe II - Problem 1 - Das Restaurierungsproblem



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe II – Problem 1 – Das Restaurierungsproblem

Hauptbedingung

(Um den Lichteinfall anzugeben muss das Durchlassvermögen der Scheiben betrachtet werden, dies berechnet sich zu 100% - absorbierter Anteil.)

$$E(x, r) = 0,9 \cdot A_{\text{Rechteck}} + 0,65 \cdot A_{\text{Halbkreis}} = 0,9 \cdot x \cdot 2r + 0,65 \cdot \frac{1}{2} \pi r^2$$

Nebenbedingung

$$U(x, r) = 2x + 2r + \pi r \stackrel{\text{def}}{=} 6 \quad \rightarrow \quad x = 3 - r - \frac{1}{2} \pi r \quad \text{gilt für } 0 < r < \frac{3}{1 + \frac{1}{2} \pi} \approx 1,17$$

Anmerkung: Alternativ kann die Nebenbedingung auch nach r aufgelöst werden, mit dem Auflösen nach x wird jedoch die weitere Rechnung wesentlich einfacher.

Stufe II – Problem 1 – Das Restaurierungsproblem

Zielfunktion

$$E(r) = 5,4r + (-1,8 - 0,575\pi) \cdot r^2 \quad \text{besitzt ein Maximum für } r = \frac{2,7}{1,8+0,575\pi} \approx 0,75$$

Antwort

Das Fenster sollte 1,50m breit und der rechteckige Teil 1,07m hoch sein.

Stufe II – Problem 2

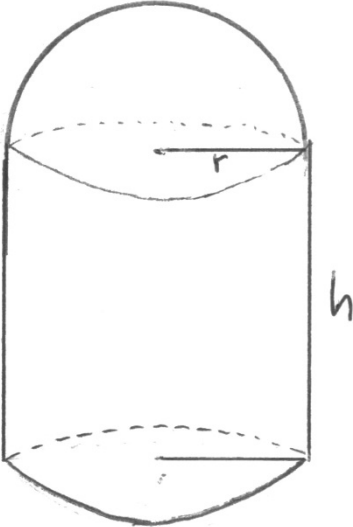
Bauvorhaben Silo

Ein Landwirt möchte einen neuen Getreidesilo bauen, der die Form eines Zylinders mit einer aufgesetzten Halbkugel haben und 80m^3 Getreide fassen soll. Die gesamte Innenfläche des Silos soll mit einem teuren Isolationsmaterial verkleidet werden.

Untersuche, ob es Maße für die geplante Form gibt, bei denen die Kosten für die Isolation möglichst gering sind.



Stufe II – Problem 2 – Bauvorhaben Silo



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe II – Problem 2 – Bauvorhaben Silo

Hauptbedingung

$$O_{\text{Silo}}(r, h) = O_{\text{Halbkugel}} + O_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h = 3\pi r^2 + 2\pi r h$$

Nebenbedingung

$$V(r, h) = V_{\text{Halbkugel}} + V_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h \stackrel{\text{def}}{=} 80$$

$$h = \frac{80}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r \quad \text{gilt für } 0 < r < \sqrt[3]{\frac{120}{\pi}} \approx 3,37$$

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe II – Problem 2 – Bauvorhaben Silo

Zielfunktion

$$O(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{160}{r}$$

besitzt ein Minimum für $r = \sqrt[3]{\frac{48}{\pi}} \approx 2,48$

Antwort

Bei einem Radius von ca. 2,48m und einer Höhe von ca. 2,49m besitzt das Silo eine minimale Oberfläche von 96,77m².

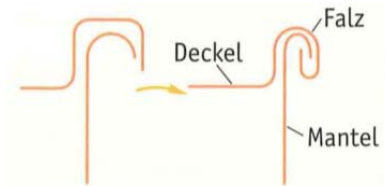
Stufe II – Problem 3

Die optimale Konservendose

- a) Viele Lebensmittel werden in einer Konservendose mit einem Volumen von 425cm^3 verkauft. Dabei beträgt die Höhe $10,8\text{cm}$ und der Durchmesser $7,4\text{cm}$.

Sind die Maße optimal, wenn bei gleichem Volumen möglichst wenig Material verwendet werden soll?

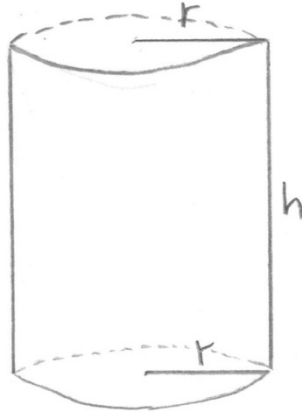
- b) Der Mantel und die beiden Böden der Dose sind jeweils in einem Falz miteinander verbunden. Die Abbildung rechts zeigt, wie ein solcher Falz entsteht. Nach Angaben des Herstellers muss zur Herstellung des Falzes zur Höhe der Dose ein Zuschlag von $1,4\text{cm}$ (je 7mm oben und unten) zugegeben werden. Für Boden und Deckel ist ein Zuschlag von je $1,8\text{cm}$ erforderlich.



Gebt eine Formel an, die für eine zylindrische Dose mit der Höhe h und dem Radius r (oder Durchmesser d) den Materialverbrauch zur Herstellung der Dose angibt.

Nutzt Geogebra oder ein CAS um in diesem Fall die optimalen Maße der Dose herauszufinden.

Stufe II – Problem 3 – Die optimale Konservendose



zu Aufgabe b): Macht euch klar, auf welche Bauteile bzw. Abmessungen der Dose diese Änderung eine Auswirkung hat! Auch in den Formeln muss diese Änderung nicht bei jeder Höhe/ jedem Radius eingerechnet werden.

Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe II – Problem 3 – Die optimale Konservendose

Aufgabe a)

Hauptbedingung

$$O_{Dose}(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Nebenbedingung

$$V(r, h) = \pi r^2 h \stackrel{\text{def}}{=} 425 \quad \rightarrow \quad h = \frac{425}{\pi r^2} \quad \text{gilt für } r \in \mathbb{R}^+$$

Aufgabe b)

Hauptbedingung

$$\begin{aligned} O_{Dose}(r, h) &= 2\pi(r + 0,9)^2 + 2\pi r(h + 1,4) \\ &= 2\pi r^2 + 6,4\pi r + 1,62\pi + 2\pi r \cdot h \end{aligned}$$

Nebenbedingung

$$V(r, h) = \pi r^2 h \stackrel{\text{def}}{=} 425 \quad \rightarrow \quad h = \frac{425}{\pi r^2} \quad \text{gilt für } r \in \mathbb{R}^+$$

Anmerkung: Die Innenmaße r und h gelten unverändert weil das neu hinzugefügte Material in der Falz verarbeitet wird.

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe II – Problem 3 – Die optimale Konservendose

Aufgabe a)

Zielfunktion

$$O(r) = \frac{850}{r} + 2\pi r^2 \quad \text{besitzt ein Minimum für } r = \sqrt[3]{\frac{425}{2\pi}} \approx 4,07$$

Antwort

Bei einem Radius von ca. 4,07cm und einer Höhe von ca. 8,17cm besitzt die Dose eine minimale Oberfläche von 313cm².

Aufgabe b)

Zielfunktion

$$O(r) = 2\pi r^2 + 6,4\pi r + 1,62\pi + \frac{850}{r} \quad \text{besitzt ein Minimum für } r \approx 3,6$$

Antwort

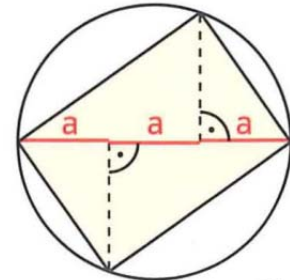
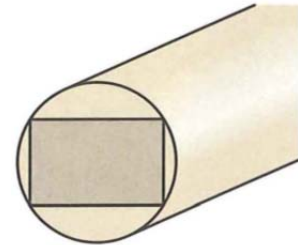
Bei einem Radius von ca. 3,6cm und einer Höhe von ca.10,44cm werden für die Dose ca 395cm² Blech benötigt.

Stufe II – Problem 4

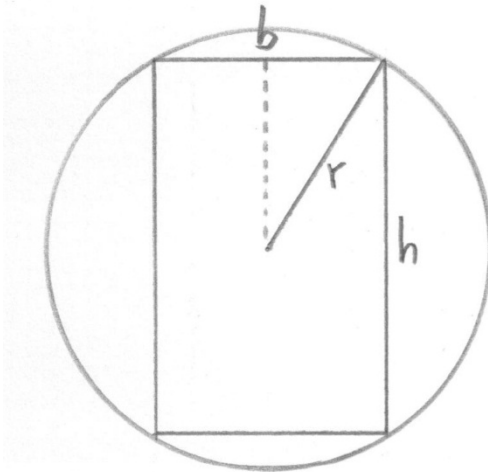
Problem im Sägewerk

Die Tragfähigkeit eines Balkens mit rechteckiger Querschnittsfläche ist proportional zur Breite b und dem Quadrat der Höhe h .

- Im Sägewerk soll aus einem 30cm dicken Stamm ein Balken herausgesägt werden, der eine möglichst große Tragfähigkeit besitzt. Wie sind seine Maße zu wählen?
- Etwas anspruchsvoller: Beurteilt auf Basis eurer Berechnungen die folgende Zimmermannsregel zu diesem Problem (vgl. Skizze):
Zeichne auf eine kreisförmige Querschnittsfläche des Baumstamms einen Durchmesser; teile diesen in drei gleiche Teile; ziehe in jedem Teilpunkt die Senkrechte zum Durchmesser; so ergibt sich der gesuchte Balkenquerschnitt.



Stufe II – Problem 4 – Problem im Sägewerk



zu Aufgabe b): Hier müsst ihr u.a. mit Hilfe des Höhensatzes die Länge der gestrichelten Linie bestimmen.

Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe II – Problem 4 – Problem im Sägewerk

Hauptbedingung

$$T_{\text{Balken}}(h, b) = h^2 \cdot b$$

Nebenbedingung

$$r^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \stackrel{\text{def}}{=} 2\sqrt{225 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad \text{gilt für } 0 < b < 30$$

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe II – Problem 4 – Problem im Sägewerk

Aufgabe a)

Zielfunktion

$T(b) = 900b - b^3$ besitzt ein Maximum für $b = \sqrt{300} \approx 17,32$

Antwort

Der tragfähigste Balken den man aus dem Stamm schneiden kann, ist 17,32cm breit und 24,49cm hoch.

Aufgabe b)

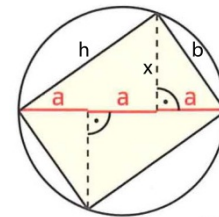
Zielfunktion aus a) für allgemeines r : $T(b, r) = 4r^2b - b^3$ besitzt ein Maximum für $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}r$

nach der Zimmermannsregel ist $a = \frac{1}{3}d = \frac{2}{3}r$

nach dem Höhensatz gilt: $x^2 = 2a^2$

nach dem Satz von Pythagoras: $b^2 = a^2 + x^2 = 3a^2 = 3\left(\frac{2}{3}r\right)^2 = \frac{4}{3}r^2$

und damit $b = \frac{2}{\sqrt{3}}r = \frac{2}{3}\sqrt{3}r$ ■



Stufe II – Problem 5

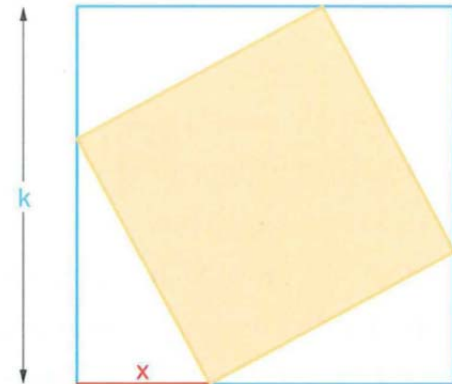
Das kleinste Innenquadrat

Auf den Seiten eines gegebenen Quadrates mit Seitenlänge $k = 10\text{cm}$ werden immer dieselben Strecken x abgetragen, wenn man das Quadrat gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Auf diese Weise werden einem Quadrat andere Quadrate einbeschrieben.

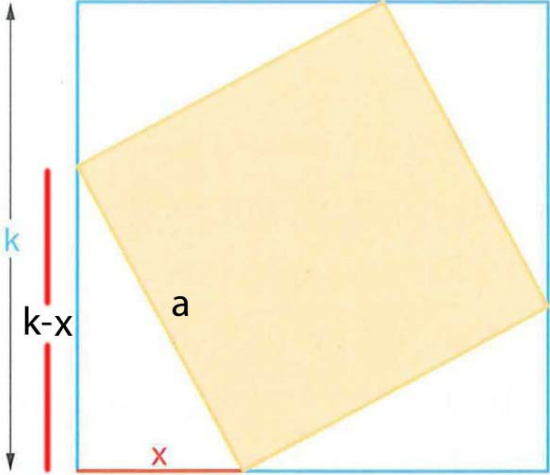
Welches dieser einbeschriebenen Quadrate hat den kleinsten Flächeninhalt?

Löse dieses Problem auf 2 Arten

- Flächeninhalt des Innenquadrats minimal
- Flächeninhalt der Dreiecke maximal



Stufe II - Problem 5 - Das kleinste Innenquadrat



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe II – Problem 5 – Das kleinste Innenquadrat

Aufgabe a)

Hauptbedingung

$$A_{\text{Innenquadrat}}(a) = a^2$$

Nebenbedingung

$$a^2 = (10 - x)^2 + x^2$$

gilt für $0 < x < 10$

Aufgabe b)

Hauptbedingung

$$A_{\text{Dreiecke}}(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} (10 - x) x$$

gilt für $0 < x < 10$

Nebenbedingung

wird hier nicht benötigt

Hilfe 2

Haupt- und Nebenbedingung

Stufe II – Problem 5 – Das kleinste Innenquadrat

Aufgabe a)

Zielfunktion

$A(x) = 2x^2 - 20x + 100$ besitzt ein Minimum für $x = 5$

Seitenlänge des Innenquadrats über die Nebenbedingung: $a = \sqrt{50} \approx 7,1$

Antwort

Das kleinste Innenquadrat hat eine Seitenlänge von ca. 7,1cm.

Aufgabe b)

Zielfunktion

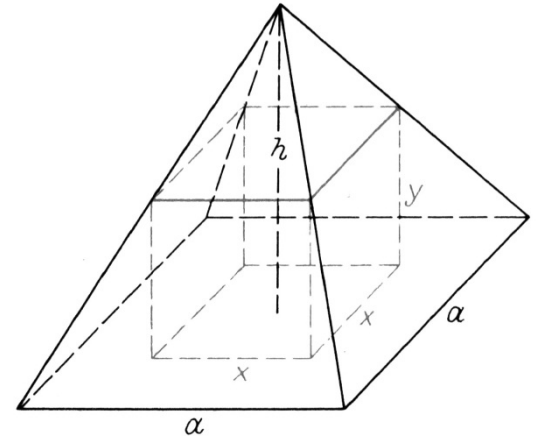
$A(x) = -2x^2 + 20x$ besitzt ein Maximum für $x = 5$

Rest siehe Aufgabe a)

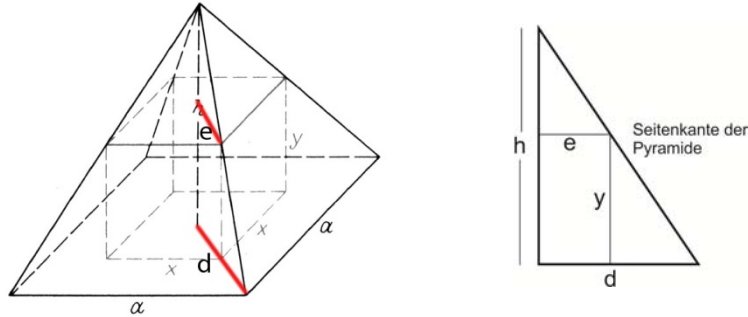
Stufe III – Problem 1

Einen Quader in eine Pyramide packen

Einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h soll ein Quader mit größtmöglichem Volumen eingeschrieben werden, dessen Grundfläche in der Grundfläche der Pyramide liegt.



Stufe III – Problem 1 – Einen Quader in eine Pyramide packen



Tipp 1

Bestimme die Längen der Diagonalen von Pyramiden- und Quadergrundfläche.

Tipp 2

Für die Nebenbedingung muss ein Strahlensatz mit den Verhältnissen der halben Diagonalen von Pyramiden- und Quadergrundfläche aufgestellt werden.

Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe III – Problem 1 – Einen Quader in eine Pyramide packen

Hauptbedingung

$$V_{\text{Quader}}(x, y) = x^2 \cdot y$$

Nebenbedingung

nach Pythagoras gilt: $d = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $e = \frac{x}{2}\sqrt{2}$ (*)

nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\frac{d}{e} = \frac{h}{h-y}$

$$\text{mit (*): } \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{x}{2}\sqrt{2}} = \frac{h}{h-y}$$

$$\text{d.h. } y = h - x \frac{h}{a} \quad \text{gilt für } 0 < x < a$$

Hilfe 2

Haupt- und Nebenbedingung

Stufe III – Problem 1 – Einen Quader in eine Pyramide packen

Zielfunktion

$$V(x) = hx^2 - \frac{h}{a}x^3 \quad \text{besitzt ein Maximum für } x = \frac{2}{3}a$$

Antwort

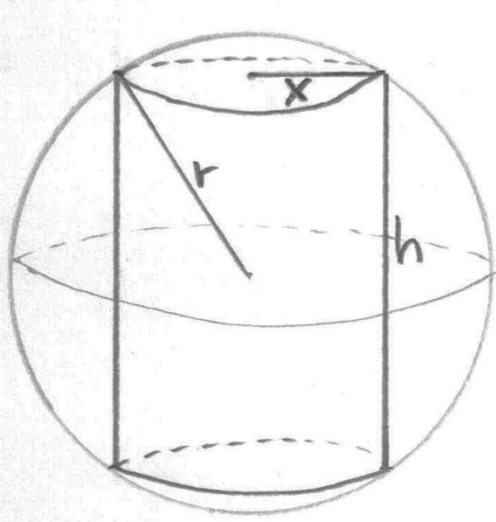
Der größte Quader in der Pyramide hat Grundseiten mit einer Länge von $\frac{2}{3}a$, eine Höhe von $\frac{1}{3}h$ und damit ein Volumen von $\frac{4}{27}a^2h$.

Stufe III – Problem 2

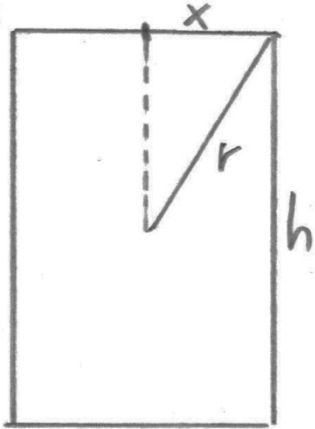
Einen Zylinder in eine Kugel packen

Einem kugelförmigen Hohlkörper mit dem Radius $r = 6\text{cm}$ soll ein Zylinder eingesetzt werden. Wie groß sind Radius und Höhe des Zylinders zu wählen, damit sein Volumen einen größtmöglichen Wert annimmt?

Stufe III - Problem 2 - Einen Zylinder in eine Kugel packen



Schnittzeichnung:



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe III – Problem 2 – Einen Zylinder in eine Kugel packen

Hauptbedingung

$$V_{\text{Zylinder}}(x, h) = \pi \cdot x^2 \cdot h$$

Nebenbedingung

$$\text{nach Pythagoras gilt: } r^2 = x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \rightarrow h = 2\sqrt{6^2 - x^2} \quad \text{mit } 0 < x < 6$$

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe III - Problem 2 - Einen Zylinder in eine Kugel packen

Zielfunktion

$V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot 2\sqrt{36 - x^2}$ → betrachte $V^2(x)$ (dann verschwindet die Wurzel)

$V^2(x) = 4\pi^2 x^4 (36 - x^2) = 144\pi^2 x^4 + 4\pi^2 x^6$ besitzt ein Maximum für $x = 2\sqrt{6}$

Antwort

Der größte Zylinder den man in eine Kugel mit Radius r packen kann hat einen Radius von $2\sqrt{6}cm \approx 4,9cm$, eine Höhe von $4\sqrt{3}cm \approx 6,9cm$ und ein Volumen von ca. $522,37cm^3$.

Stufe III – Problem 3

Bau einer Lagerhalle

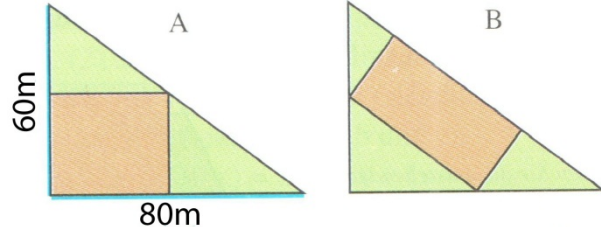
Auf einem dreieckigen Grundstück, soll eine rechteckige Lagerhalle gebaut werden. Bestimmt für beide Fälle die größtmögliche Fläche der Halle, wenn diese

- a) bis zur Grundstücksgrenze reichen darf.

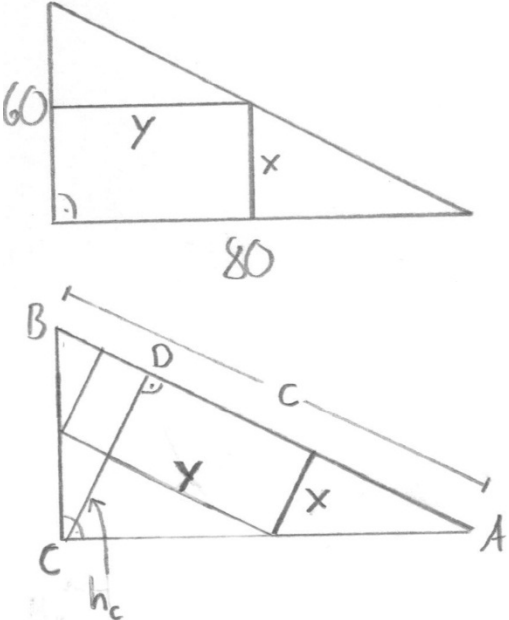
Tipp: In Situation B wird die Höhe auf der Hypotenuse benötigt.

- b) **(sehr anspruchsvoll)**: 3m Abstand zur Grenze haben muss. (Lösung nur für Problem A)

Tipp: Dazu muss in das vorhandene Dreieck ein kleineres Dreieck einbeschrieben werden, das zu allen Grundstücksgrenzen einen Abstand von 3m hat. Schwierigkeit dabei ist es, die Längen dieses kleineren Dreiecks zu bestimmen.



Stufe III - Problem 3 - Bau einer Lagerhalle - Aufgabe a)



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe III - Problem 3 - Bau einer Lagerhalle- Aufgabe a)

Fall A

Hauptbedingung

$$A_{\text{Lagerhalle}}(x, y) = x \cdot y$$

Nebenbedingung

Nach Strahlensatz gilt: $\frac{80-y}{x} = \frac{80}{60} \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 80$ mit $0 < x < 60$

Fall B

Hauptbedingung

$$A_{\text{Lagerhalle}}(x, y) = x \cdot y$$

Nebenbedingung

Nach Strahlensatz gilt: $\frac{h_c}{c} = \frac{h_c-x}{y}$ d.h. $y = \frac{c}{h_c}(h_c - x) \xrightarrow{(1)\&(2)} y = \frac{100}{48}(48 - x)$

wobei: $c = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ (1) und $\frac{h_c}{80} = \frac{60}{100} \rightarrow h_c = 48$ (2)
(weil die Dreiecke ABC und ACD ähnlich zueinander sind)

Hilfe 2
Haupt- und Nebenbedingung

Stufe III - Problem 3 - Bau einer Lagerhalle- Aufgabe a)

Fall A

Zielfunktion

$A(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 80x$ besitzt ein Maximum für $x = 30$

Antwort

Die Lagerhalle mit der größten Fläche von 1200m^2 ist 30m breit und 40m lang.

Fall B

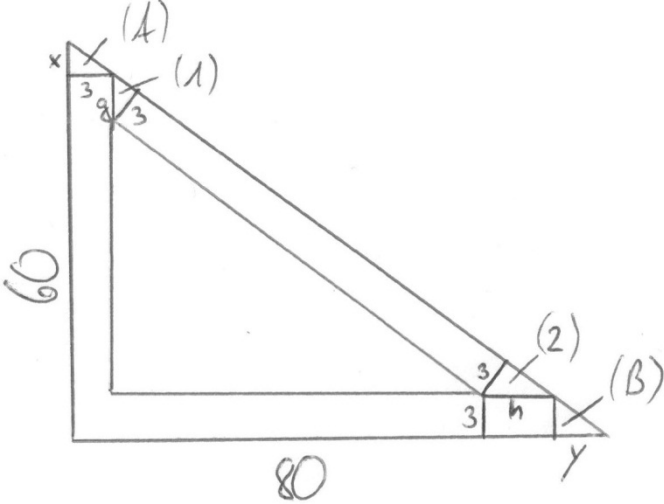
Zielfunktion

$A(x) = 100x - \frac{25}{12}x^2$ besitzt ein Maximum für $x = 24$

Antwort

Die Lagerhalle mit der größten Fläche von 1200m^2 ist 24m breit und 50m lang.

Stufe III - Problem 3 - Bau einer Lagerhalle - Aufgabe b)



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe III - Problem 3 - Bau einer Lagerhalle - Aufgabe b)

Berechnung der neue Grundstücksmaße

Man benötigt die Maße des einbeschriebenen Dreiecks, dessen Seiten vom Grundstücksdreieck einen Abstand von 3m haben. Es gilt:

$$a' = 60 - 3 - g - x \quad b' = 80 - 3 - h - y \quad c' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

Zur Berechnung der Längen x und y : Die kleinen Dreiecke (A) und (B) sind jeweils ähnlich zum Grundstücksdreieck, daher gilt:

$$(A): \frac{x}{3} = \frac{60}{80} \rightarrow x = 2,25$$

$$(B): \frac{y}{3} = \frac{80}{60} \rightarrow y = 4$$

Zur Berechnung der Längen g und h : Die kleinen Dreieck (1) und (2) sind jeweils ähnlich zum Grundstücksdreieck daher gilt:

$$(1): \frac{g}{3} = \frac{100}{80} \rightarrow g = 3,75$$

$$(2): \frac{h}{3} = \frac{100}{60} \rightarrow h = 5$$

Damit ergibt sich: $a' = 51m$ $b' = 68m$ $c' = 85m$

Hauptbedingung: $A_{Lagerhalle}(x, y) = x \cdot y$

Nebenbedingung

Nach Strahlensatz gilt: $\frac{68-y}{x} = \frac{68}{51} = \frac{4}{3} \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 68$ mit $0 < x < 51$

Hilfe 2

Haupt- und Nebenbedingung

Stufe III - Problem 3 - Bau einer Lagerhalle - Aufgabe b)

Zielfunktion

$$A(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 68x$$

besitzt ein Maximum für $x = 25,5$

Antwort

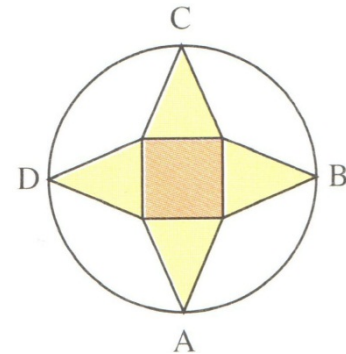
Die Lagerhalle mit der größten Fläche von 867m^2 ist $25,5\text{m}$ breit und 34m lang.

Stufe III – Problem 4

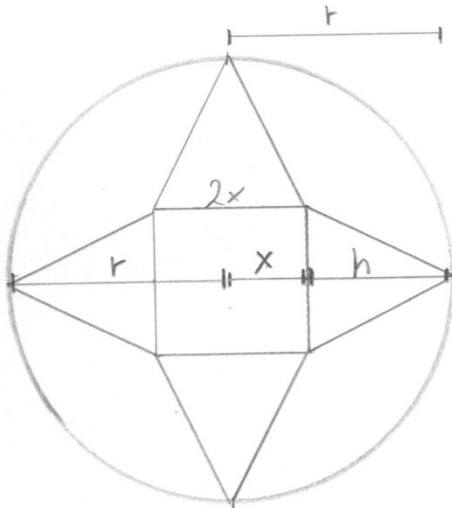
Von der Kreisscheibe zur Pyramide

Aus einem Kreis mit dem Radius $r = 20\text{cm}$ wird ein symmetrischer Stern ausgeschnitten und die vier Ecken A, B, C und D zur Spitze einer quadratischen Pyramide hochgebogen. Wie groß kann das Volumen der entstehenden Pyramide höchstens werden?

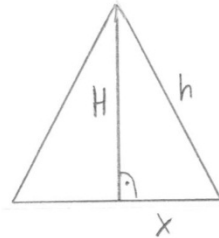
Zusatz: Wie groß ist in diesem Fall die Pyramidenoberfläche?



Stufe III - Problem 4 - Von der Kreisscheibe zur Pyramide



Schnittzeichnung
durch die Pyramide:



Hilfe 1
Skizze und Variablenwahl

Stufe III – Problem 4 – Von der Kreisscheibe zur Pyramide

Hauptbedingung

$$V_{\text{Pyramide}}(x, h) = \frac{1}{3} \cdot (2x)^2 \cdot \sqrt{h^2 - x^2}$$

Nebenbedingung

$$h + x = 20 \quad \rightarrow \quad h = 20 - x \quad \text{gilt für } 0 < x < 20$$

Hilfe 2

Haupt- und Nebenbedingung

Stufe III - Problem 4 - Von der Kreisscheibe zur Pyramide

Zielfunktion

$$V(x) = \frac{4}{3}x^2 \cdot \sqrt{(20-x)^2 - x^2}$$

$$V^2(x) = \frac{16}{9}x^4(20-x)^2 - x^2 = \frac{6400}{9}x^4 - \frac{640}{9}x^5 \quad \text{besitzt ein Maximum für } x = 8$$

Antwort

Die größtmögliche Pyramide hat Grundseiten mit einer Länge von 16cm, eine Höhe von ca. 8,9cm und damit ein Volumen von ca. 759cm³.

Zusatz:

$$O_{\text{Pyramide}}(x, h) = (2x)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} 2x h = 640\text{cm}^2$$