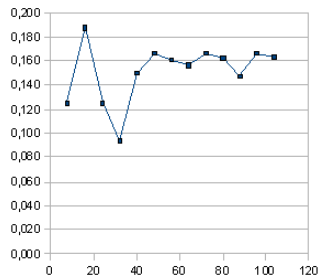
Stochastik

Die **Stochastik** besteht aus zwei Teilgebieten, der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die **Statistik** beschreibt die Vergangenheit und verwendet Informationen, die (in realen Versuchen) tatsächlichen aufgetreten sind. Die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** "beschreibt" die Zukunft. Sie gibt Informationen darüber, welche Werte (aufgrund bestimmter Annahmen) für zukünftige Versuche "erwartet" werden können. Die Stochastik wird erheblich vom **Zufall** beeinflusst, man spricht daher in der Stochastik oft von **Zufallsexperimenten**. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Begriff "**Wahrscheinlichkeit**".

Begriffe	**Erklärung + Beispiele beim Würfeln**
Ergebnis	Das Resultat eines Zufallsexperiments wird als Ergebnis bezeichnet.
Ergebnisraum Ω	Alle bei einem Experiment möglichen Ergebnisse bilden den Ergebnisraum Ω (= die Menge aller möglichen Ergebnisse). *Bsp.: Ω = {1,2,3,4,5,6}*
Ereignis	Ereignisse E kann man als Zusammenfassung mehrerer Ergebnisse zu einem Ganzen auffassen. Es gilt: $E \subseteq \Omega$ *Bsp.: E = „es fällt eine gerade Zahl“ = {2,4,6}*
Elementarereignis	Einelementige Ereignisse nennt man Elementarereignisse. *Bsp.: E = „Es fällt die 4“ = {4}*
unmögliches Ereignis	Ein Ereignis, das nicht eintreten kann, nennt man unmögliches Ereignis E = { }. *Bsp.: E = „Es fällt die 7“ = { }*
sicheres Ereignis	Besteht das Ereignis aus den gleichen Elementen wie der Ergebnisraum Ω , also E = Ω, so nennt man das Ereignis ein sicheres Ereignis. *Bsp.: E = „Es fällt eine Zahl von 1 bis 6“ = {1,2,3,4,5,6}*
Gegenereignis	Zu jedem Ereignis *E* gibt es auch eine sogenanntes Gegenereignis $\overline{E}$. Dieses tritt genau dann ein, wenn *E* nicht eintritt. Es gilt: $\overline{E} = \Omega \setminus E$ *Bsp.: E = {1,2,3}* $\Rightarrow \overline{E}$ *= {4,5,6}*
Und-Ereignis	*Schnittmenge zweier Ereignisse:* Symbol: ∩ *Bsp.: E1 = {1,2,3}, E2 = {2,4,6}* ⇒ *E= E1 ∩ E2={2}*
Oder-Ereignis	*Vereinigungsmenge zweier Ereignisse:* Symbol: ∪ *Bsp.: E1 = {1,2,3}, E2 = {2,4,6}* ⇒ *E= E1 ∪ E2={1,2,3,4,6}*

Gesetz der großen Zahlen und Wahrscheinlichkeit:

Trägt man bspw. beim Würfeln die relative Häufigkeit für das Fallen einer 6 aus, so erkennt man, dass sich die relative Häufigkeit h(6) für wachsendes n einem bestimmten Wert annähert. Diese Stabilisierung der relativen Häufigkeiten bezeichnet man als das ***Gesetz der großen Zahlen***. Der Stabilisierungswert, der sich für große n einstellt, nennt man ***Wahrscheinlichkeit P*** des Ereignisses A (P wie Probability).



Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A nennt man P(A).

Dabei gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$
P(A) kann als Bruch oder in %-Schreibweise angegeben werden.

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{ e_1; e_2; .... ; e_n \}$. Eine Zuordnung, die jedem Elementarereignis $\{e_i\}$ genau eine reelle Zahl $P(e_i)$ zuordnet, heißt ***Wahrscheinlichkeitsverteilung***.

Eigenschaften:

$P(e_i) \geq 0$ (für alle i)

$$\sum_i P(e_i) = 1 \quad \Rightarrow P(e_i) < 1$$

$P(e_i)$ heißt ***Wahrscheinlichkeit* des Elementarereignisses** $\{e_i\}$.

Betrachtet man ein Ereignis E, das aus mehreren Elementarereignissen besteht, dann gilt:

$P(E) = P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_k)$
$P(E) = 0$, falls $E = \{\ \}$ (unmögliches Ereignis)
$P(E) = 1$, falls $E = \Omega$ (sicheres Ereignis)

Häufig verwendet man auch die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, die sogenannte ***Gegenwahrscheinlichkeit***, um Rechnungen zu vereinfachen.

$$\boxed{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$$

Betrachtet man zwei beliebige Ereignisse $E_1, E_2 \subset \Omega$, dann gilt für die Vereinigungsmenge der beiden Ereignisse

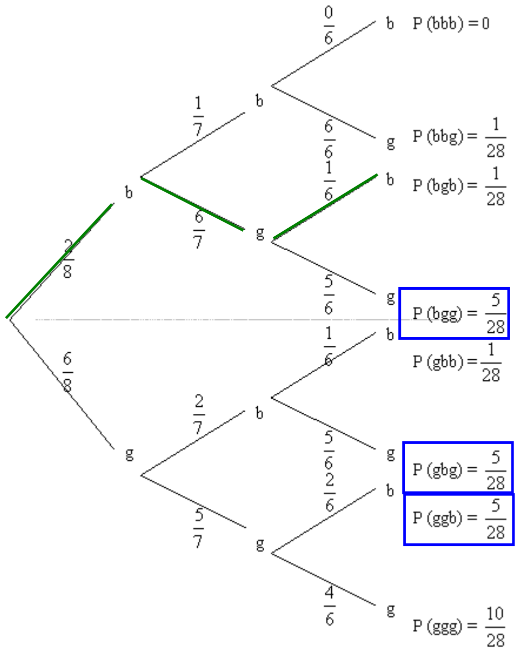
$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

Mehrstufige Zufallsexperimente

Mehrstufige Zufallsexperimente sind Experimente, die mehrere Male (n-mal) hintereinander ausgeführt werden. Die Ergebnisse n-stufiger Zufallsexperimente sind sog. ***n-Tupel*** (e1, e2, e3, ... ,en), wobei ei das Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist. Mehrstufige Zufallsexperimente sind z.B. das mehrmalige Werfen einer Münze, das mehrmalige Würfeln oder das wiederholte Ziehen einer Kugel aus einer Urne, was ein sehr beliebtes Modell in der Stochastik ist (***Urnenmodell***).

Beispiel:
3 maliges Ziehen aus der Urne mit roten und weißen Kugeln. Die möglichen Ergebnisse (3-Tupel = Tripel) sind: (www), (wwr), (wrw), (wrr), (rww), (rwr), (rrw), (rrr)
Um eine übersichtliche Darstellung zu haben, wählt man in der Stochastik meist das ***Baumdiagramm***. Dies hilft auch, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Beispiel: Dreimaliges Ziehen aus einer Urne mit 2 blauen und 6 grünen Kugeln. Man gibt entlang der ***Pfade*** an, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese eintreten.



Beispiel: 1. Pfadregel
P (bgb)
= 2/8 · 6/7 · 1/6
= 1/28

Beispiel: 2. Pfadregel
P („zweimal grün“)
= P (bgg) + P (gbg) + P (ggb)
= 5/28 + 5/28 + 5/28
= 15/28

Es gibt sehr viele mögliche Ergebnisse, d.h. der Baum wird schnell unübersichtlich ! Deshalb: nur das zeichnen, was wirklich gebraucht wird: ***reduziertes* Baumdiagramm**

Pfadregeln:
1. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** ist gleich dem **Produkt** aller Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zum Ergebnis führt.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der **Summe** aller Ergebniswahrscheinlichkeiten, die zum Ereignis dazugehören.

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsversuch heißt ***Laplace-Experiment***, wenn alle Elementarereignisse $\{e_i\}$ aus dem Ergebnisraum Ω die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Besteht also der Ergebnisraum Ω aus n verschiedenen Elementar-ereignissen, man schreibt |Ω| = n , dann gilt:

$$P(e_i) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Beispiele für Laplace-Experimente sind Würfeln, Werfen einer Münze oder Ziehen einer Kugel aus einer Urne.

Die Bestimmung einer **Laplace-Wahrscheinlichkeit** läuft also auf ein "Abzählen" zweier Anzahlen hinaus:
1. Die Anzahl aller Elementarereignisse (also die Anzahl der Elemente in Ω)
2. Die Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse (also die Anzahl der Elemente in A).

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl aller Elementarereignisse}}}$$

Für kleine Mengen sind diese Anzahlen recht einfach zu bestimmen, für größere Mengen benötigt man jedoch ***kombinatorische Abzählverfahren***, um zum Ergebnis zu kommen.

Kobinatorik

Auswahl von k Elementen aus n verschiedenen Elementen
⇔ Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln

Reihenfolge wird berücksichtigt geordnete Stichprobe		**Reihenfolge wird nicht berücksichtigt** ungeordnete Stichprobe	
mit Zurücklegen	**ohne Zurücklegen**	**mit Zurücklegen**	**ohne Zurücklegen**
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$ *	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$
z.B. Fußballtoto	z.B. Wörter aus den Buchstaben M,A,T,H,E		z.B. Lotto

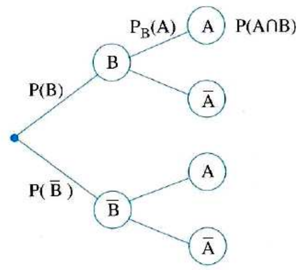
* Sonderfall: k=n (“**geordnete Vollerhebung**”)

Alle n verschieden:	**Mit gleichen Elementen (“MISSISSIPPI”):**
$n!$	$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots}$

Fakultät:	**Binomialkoeffizient:**
n! = n·(n-1) · ... ·3·2·1 Es ist: 1! = 0! = 1	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Man betrachtet eine Wahrscheinlichkeit P(A) für ein Ereignis A. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, ändert sich jedoch ggf., wenn bereits ein Ereignis B eingetreten ist.



Man spricht in diesem Zusammenhang von einer ***bedingten Wahrscheinlichkeit*** und schreibt $P_B(A)$ statt P(A).
(lies: Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B)
$P_B(A)$ gibt also an, mit welcher Wahrscheinlichkeit A eintritt, wenn bereits B eingetreten ist.

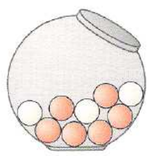
Die Bestimmung von $P_B(A)$ erfolgt nach der folgenden Formel:

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ oder } P_B(A) = \frac{Anz.\ Elemente\ in\ A\cap B}{Anz.\ Elemente\ in\ B}}$$

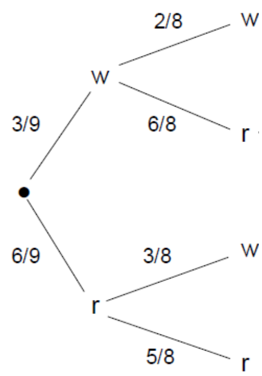
Die Formel folgt aus $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{Anz.\,günst.\,Ergebnisse}{Anz.\,aller\,Ergebnisse}$ mit:
günstige Ergebnisse = alle Ergebnisse aus A, die auch in B vertreten sind, d.h. aus A∩B.
alle Ergebnisse = Ergebnisse der Menge B

Außerdem stellt die Formel eine Umformung der Pfadregel **P(A∩B) = P_B(A) · P(B)** dar.

Beispiel:



Aus einer Urne mir 6 roten (r) und 3 weißen (w) Kugeln wird ohne Zurücklegen gezogen. Für das Ereignis A: „Ziehen einer weißen Kugel“ gilt: P(A) = 1/3
Für das Ereignis B: „Im ersten Zug wird eine weiße Kugel gezogen“ ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel:



Man berechnet:

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \text{ oder } P_B(A) = \frac{Anz.\ Elemente\ in\ A\cap B}{Anz.\ Elemente\ in\ B}$$

Wurde im ersten Zug eine weiße Kugel gezogen, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ = 2/8. (Es befinden sich dann noch 8 Kugeln in der Urne: 2 weiße und 6 rote).

Vierfeldertafel

Beispiel
Eine Urne enthält 200 Kugeln. 140 Kugeln bestehen aus dem Material Holz und 60 Kugeln sind aus Kunststoff. 50 der Holzkugeln sind mit der Farbe rot gestrichen und 90 sind grün. 20 der Kunststoffkugeln sind rot und 40 sind grün. Folgende Ereignisse werden definiert:

A: Die Kugel ist aus Holz — $\overline{A}$: Die Kugel ist aus Kunststoff

B: Die Kugel ist rot — $\overline{B}$: Die Kugel ist grün

Fragestellung: Jemand zieht eine Kugel und spürt mit der Hand, dass es sich um eine Holzkugel handelt. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel in seiner Hand rot ist? D.h. gesucht wird $P_A(B)$.
Die Kugeln tragen zwei Merkmale mit jeweils zwei Ausprägungen. Dieser Sachverhalt kann in einer Vierfeldtafel dargestellt werden:

Vierfeldertafel mit Anzahlen:

	B **: rot**	$\overline{B}$ **: rot**	**Summe**
A **: Holz**	50	90	140
$\overline{A}$ **: Kunststoff**	20	40	60
Summe	70	130	200

Mit den Daten der Tafel lassen sich direkt folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$P(A) = \frac{140}{200} = 0{,}7$ $\quad P(\overline{A}) = \frac{60}{200} = 0{,}3$ $\quad P(A \cap B) = \frac{50}{200} = 0{,}25$ $\quad P(A \cap \overline{B}) = \frac{90}{200} = 0{,}45$

$P(B) = \frac{70}{200} = 0{,}35$ $\quad P(\overline{B}) = \frac{130}{200} = 0{,}65$ $\quad P(\overline{A} \cap B) = \frac{20}{200} = 0{,}1$ $\quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{40}{200} = 0{,}2$

Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten:

	B **: rot**	$\overline{B}$ **: rot**	**Summe**
A **: Holz**	$P(A \cap B)$ =0,25	$P(A \cap \overline{B})$ =0,45	$P(A)$ =0,70
$\overline{A}$ **: Kunststoff**	$P(\overline{A} \cap B)$ =0,10	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ =0,20	$P(\overline{A})$ =0,30
Summe	$P(B)$ =0,35	$P(\overline{B})$ =0,65	1

Bestimmung von $P_B(A)$: $\quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}25}{0{,}35} \approx 0{,}36$

Wenn man also weiß, dass die gezogene Kugel aus Holz besteht, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie die Farbe rot hat 36%.

Unabhängigkeit

Durch das Eintreten eines bestimmten Ereignisses B kann sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines weiteren Ereignisses A ändern (bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$).

Im Allgemeinen ist $P_B(A) \neq P(A)$. In diesem Fall nennt man A ***abhängig*** von B.

Wird die Wahrscheinlichkeit P(A) jedoch durch das Eintreten des Ereignisses B ***nicht geändert***, gilt also $P(A) = P_B(A)$ und auch umgekehrt $P(B) = P_A(B)$, so nennt man A und B ***unabhängige Ereignisse***.

Die (Un-)Abhängigkeit von zwei Ereignissen kann recht einfach gezeigt werden:

Am ***Baumdiagramm*** können die Wahrscheinlichkeiten direkt abgelesen werden.

Ist die Wahrscheinlichkeit in der 2. (oder höheren) Stufe zu einem Ergebnis in jedem Teilbaum die selbe, dann ist sie offensichtlich nicht von vorherigen Ergebnissen abhängig (wie z.B. beim Ziehen mit Zurücklegen). Gibt es unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zu gleichen Ergebnissen, sind die Ereignisse abhängig voneinander (wie beim Ziehen ohne Zurücklegen).

In einer ***Vierfeldertafel*** kann die (Un-)Abhängigkeit rechnerisch gezeigt werden:
Gilt die Gleichung $\boxed{P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)}$ so sind die Ereignisse A und B unabhängig voneinander.

Man kann zudem erkennen, dass in der Vierfeldertafel zweier unabhängiger Ereignisse die 2 Zahlenpaare (sowohl nach rechts als auch untereinander) das selbe Verhältnis haben.

Binomialverteilung

Bei vielen Zufallsexperimenten interessiert man sich nur dafür, ob ein Ereignis A eintritt oder ob es nicht eintritt.

Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es nur darum geht, ob ein Ereignis A eingetreten ist oder nicht.
Das Eintreten von A bezeichnet man als **Treffer** T bzw. **Erfolg**.

Das Eintreten von $\overline{A}$ bezeichnet man als **Niete** N bzw. **Misserfolg**.

Jedes beliebige Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Experiment angesehen werden, wenn man bei der Ausführung nur fragt, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt oder nicht.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer mit p, also P(A) = p, so gilt:

$$P(\overline{A}) = 1 - p \qquad , \text{da } A \cup \overline{A} = \Omega$$

Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal durchgeführt und sind die einzelnen Experimente dabei unabhängig voneinander, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette**. n heißt dabei die **Länge** der Bernoulli-Kette.

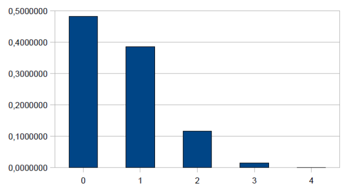
Bernoulli-Formel:
Für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A mit Trefferwahrscheinlichkeit p in der Bernoulli-Kette der Länge n genau k-mal auftritt, gilt:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Ist *X* die Trefferanzahl bei einer Bernoulli-Kette, dann nennt man die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung von *X* eine ***Binomialverteilung*** mit den Parametern n (Anzahl der Ziehungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit).
Deshalb schreibt man für $P(X = k)$ auch $B(n; p; k)$ oder $B_{n;p}(k)$.

Eigenschaften der Binomialverteilung:

Bei festgelegter Ziehungsanzahl *n* und bei veränderlicher Trefferwahrscheinlichkeit *p* gilt:
1. Je größer *p*, desto weiter rechts (bei größeren *k*) liegt das Maximum der Verteilung
2. Für *p* = 0,5 ist die Verteilung symmetrisch
3. Es gilt die Symmetriebeziehung $B(n; p; k) = B(n; 1-p; n-k)$



Bei gleichbleibender Trefferwahrscheinlichkeit *p* und veränderlicher Anzahl *n* gilt:
1. Mit wachsendem *n* werden die Verteilungen flacher
2. Mit wachsendem *n* werden die Verteilungen symmetrischer.

Für manche Aufgaben ("Mindestens-" und "Höchstens"-Aufgaben) werden sogenannte **kumulierte Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k)$** berechnet. In ihr sind alle Einzel-Wahrscheinlichkeiten von X = 0 bis zum Wert X = k aufsummiert:

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + ... + P(X = k)$$

Es gibt Tabellen zur Binomialverteilung, aus denen sich die **einfache Wahrscheinlichkeit P (X=k)** für verschiedene Werte von n und p ablesen lassen. Beispiel: $P_{2;0,25}(X=1) = 0,3750$

n	k		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		n
								p							
2	0	0,	9604	9409	9025	8100	6944	6400	5625	4900	4444	3600	2500	2	2
	1		0392	0582	0950	1800	2778	3200	3750	4200	4444	4800	5000	1	
	2		0004	0009	0025	0100	0278	0400	0625	0900	1111	1600	2500	0	

Es gibt aber auch kumulierte Tabellen zur Binomialverteilung („**Summenverteilung**“), aus denen sich die **kumulierte Wahrscheinlichkeit P (X≤k)** für verschiedene Werte von n und p ablesen lassen.
Beispiel: $P_{2;0,25}(X \leq 1) = 0,9375$

n	k		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		n
								p							
2	0	0,	9604	9409	9025	8100	6944	6400	5625	4900	4444	3600	2500	1	2
	1		9996	9991	9975	9900	9722	9600	9375	9100	8889	8400	7500	0	

Lösungswege für Aufgaben der Form

„genau k Treffer“:	$P(X = k)$	→ einfache Binomialverteilungstabelle
„höchstens k Treffer“:	$P(X \leq k)$	→ kumulierte Binomialverteilungstabelle
„mindestens k Treffer“:	$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$	→ kumulierte Binomialverteilungstabelle
„mindestens a und höchstens b Treffer“:	$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$	→ kumulierte Binomialverteilungstabelle