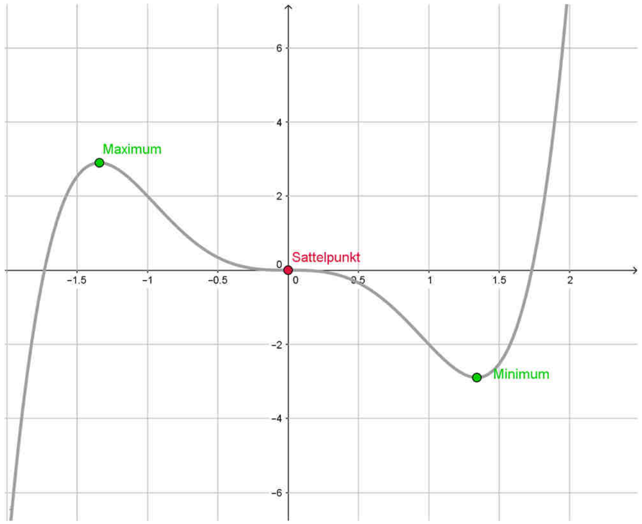
Extremstellen



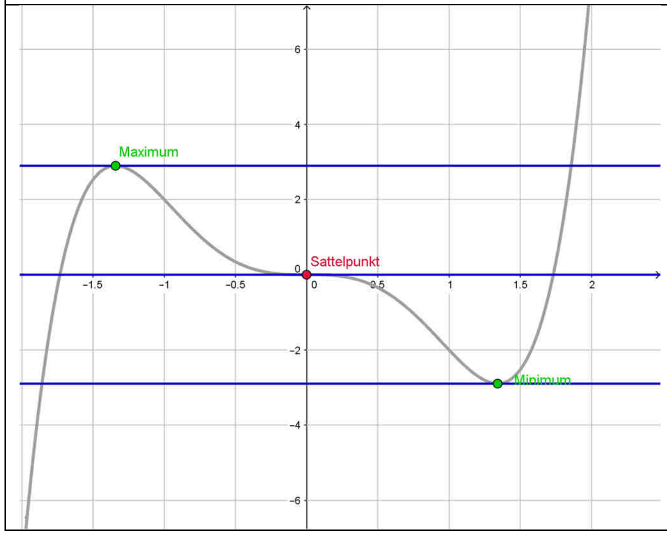
Stellt man sich den Graphen als Höhenprofil vor, so sind **Extremstellen** die Bergkuppen oder Talsenken.

Ein **lokales Maximum** bedeutet nicht, dass es die höchste Stelle im gesamten Gebirge ist, sondern dass diese Stelle **(x_0)** in einer gewissen Umgebung **(I)** der höchste Punkt ist. Alle Punkte **(x)** in der Umgebung **(I)** liegen tiefer.
Genauso ist ein **lokales Minimum** in einer gewissen Umgebung der tiefste Punkt.

Definition:
Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, wenn es ein Intervall I mit $x_0 \in I$ gibt, so dass für alle $x \in I$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$
Eine Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Minimum, wenn es ein Intervall I mit $x_0 \in I$ gibt, so dass für alle $x \in I$ gilt: $f(x) \geq f(x_0)$

☹ Diese Definition hat aber einen großen Nachteil. Man kann damit nur <u>zu einer gegebenen Stelle überprüfen</u>, ob es eine Extremstelle ist. Die Definition hilft uns <u>nicht</u> dabei eine Extremstelle zu finden.

Da wir nicht alle beliebigen x-Werte überprüfen können, benötigen wir ein Kriterium, um zu wissen, welche x-Werte wir auf der Suche nach Extremstellen nur unter die Lupe nehmen müssen.

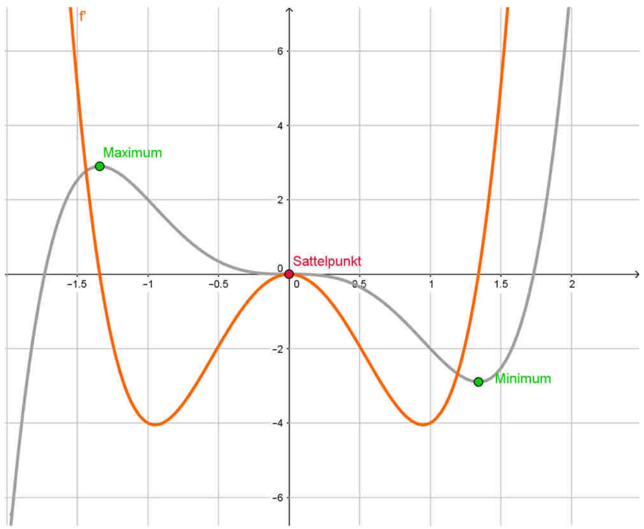


Am einfachsten ist es nur alle Punkte zu überprüfen, die eine **waagrechte Tangente** haben.

Wir suchen also alle möglichen Stellen, auf die man auf unserem Gebirge einen Schneemann positionieren könnte, ohne dass er den Hang abrutscht oder umkippt. Für diese Schneemannstellen muss die Steigung und damit die Ableitung Null sein. Daraus lässt sich eine mathematische Anforderung an die Extremstellen formulieren:

Notwendiges Kriterium für Extremstellen:
Sei eine Funktion f gegeben. Ist an der Stelle x_0 ein Maximum oder Minimum, so muss zwingend die Ableitung an dieser Stelle 0 sein. Es gilt: $f'(x_0) = 0$

😐 Aber es bleibt noch ein Problem. Es können sich bei den Kandidaten auch Sattelpunkte einschleichen, die wir noch aussortieren müssen. Außerdem wäre es schön ein Kriterium zu haben, mit dem sich Maxima und Minima unterscheiden lassen.

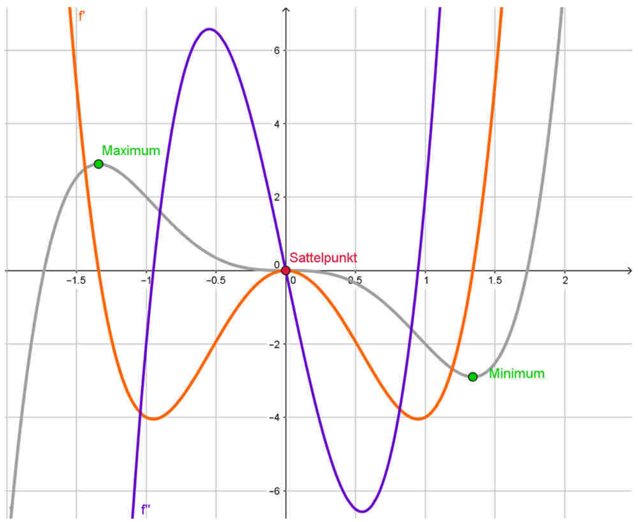


Betrachtet man die **Ableitungsfunktion f'**, so sieht man, dass diese genau an den Stellen, an denen ein Extrempunkt oder ein Sattelpunkt vorliegt, 0 wird. An den Extremstellen und am Sattelpunkt ist die Ableitung gleich Null, aber an allen Punkten unterscheidet sich der Verlauf der Ableitungsfunktion.

An den Extremstellen wechselt die Ableitung das Vorzeichen, während am Sattelpunkt die Ableitung vorher und nachher dasselbe Vorzeichen hat.

Erste hinreichende Bedingung zur Bestimmung von Extremstellen
Die Funktion f sei auf einem Intervall $I = [a;b]$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in I$.
Wenn $f'(x) = 0$ ist und f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von + nach – hat, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.
Wenn $f'(x) = 0$ ist und f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von – nach + hat, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

😐 Jetzt haben wir eine Möglichkeit Kandidaten für eine Extremstelle zu finden und eine Möglichkeit diese auf Maximum, Minimum oder Sattelpunkt zu untersuchen. Es geht aber noch eleganter.



Die Ableitungsfunktion f' unterscheidet sich an den unterschiedlichen Kandidatenstellen aber auch in ihrem Monotonie-Verhalten.

An einem Maximum ist die Ableitungsfunktion f' streng monoton fallend und an einem Minimum streng monoton steigend. Am Sattelpunkt hat die Ableitungsfunktion f' hingegen einen Extrempunkt und somit Steigung 0.

Um die Monotonie einer Funktion zu untersuchen, müssen wir deren Ableitung betrachten. Um nun die Monotonie von f' zu untersuchen, müssen wir f' ableiten. Die Ableitung von f' nennt man **f''**. Man spricht dabei von der **zweiten Ableitung**. Es folgt:
Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist $f'(x_0)$ streng monoton fallend.
Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist $f'(x_0)$ streng monoton steigend.

Zweite hinreichende Bedingung zur Bestimmung von Extremstellen
Die Funktion f sei auf einem Intervall $I = [a;b]$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in (a;b)$.
Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.
Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

☺ Jetzt haben wir eine Möglichkeit Kandidaten für eine Extremstelle zu finden und können mit der zweiten Ableitung schnell unterscheiden, ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

Achtung:
Ist bei der Überprüfung $f''(x_0)=0$, so kann leider keine Aussage getroffen werden und es muss doch eine Überprüfung auf ein Vorzeichenwechel von $f'(x)$ stattfinden.