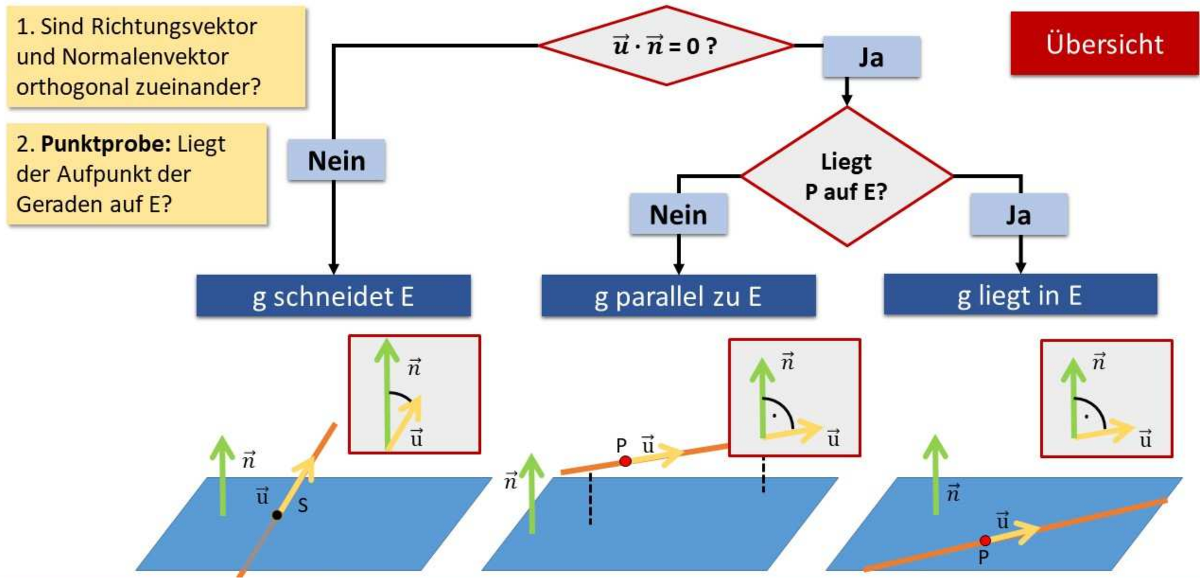
Lagebeziehung Ebene – Gerade

Erklärvideo

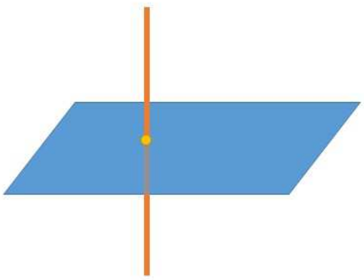
Es gibt drei verschiede Möglichkeiten für eine Ebene und eine Gerade, wie sie zueinander liegen können. Um die drei Fälle mit zwei kurzen Fragen unterscheiden zu können, ist es wichtig, dass man die Normalenvektoren der Ebene kennt. D.h. die Ebene sollte somit in Normalen- oder Koordinatenform vorliegen, um den Normalenvektor abzulesen.



Das Verfahren funktioniert zwar sehr schnell und gut, um die Lagebeziehung zu ermitteln, es hilft jedoch nicht, wenn nach dem Schnittpunkt von sich schneidender Ebene und Geraden gefragt wird. In diesem Fall hilft das folgende Rechenverfahren.

Lagebeziehung Ebene -Gerade

g schneidet E



1 gemeinsamer Punkt

E: $1x_1 - 2x_2 + 1x_3 = -4$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$

Geradengleichung als 3 Gleichungen auffassen:

$x_1 = -5 - 1 \cdot r$
$x_2 = 1 + 3 \cdot r$
$x_3 = -1 + 5 \cdot r$

Geradengleichungen in Ebene einsetzen und nach r auflösen:

$1x_1 - 2x_2 + 1x_3 = -4$
$1 \cdot (5 - 1r) - 2 \cdot (1 + 3r) + 1 \cdot (-1 + 5r) = -4$
$-5 - r - 2 - 6r - 1 + 5r = -4$
$-8 - 2r = -4 \quad |+8$
$-2r = 4 \quad |:(-2)$

$\Rightarrow r = -2$

r in g einsetzen:

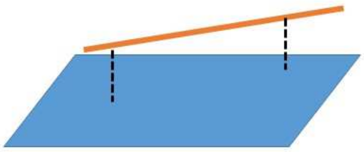
$\vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-1\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-6\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\-11\end{pmatrix}$ S = (-3|-5|-11)

www.schlauistwow.de

Und was passiert bei der Rechnung, wenn die Gerade parallel zur Ebene liegt oder in der Ebene? Dann erkennt man das auch während des Rechenverfahrens.

Lagebeziehung Ebene -Gerade

g parallel zu E



kein gemeinsamer Punkt

E: $3x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Geradengleichung als 3 Gleichungen auffassen:

$x_1 = -1 + 3 \cdot r$
$x_2 = 4 - 3 \cdot r$
$x_3 = -1 + 6 \cdot r$

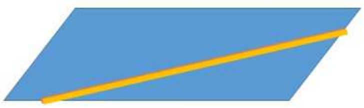
Geradengleichungen in Ebene einsetzen und nach r auflösen:

$3x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3$
$3 \cdot (-1 + 3r) + 1 \cdot (4 - 3r) - 1 \cdot (-1 + 6r) = 3$
$-3 + 9r + 4 - 3r + 1 - 6r = 3$
$2 + 0r = 3$
$2 = 3$ falsche Aussage

$\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
$\Rightarrow$ Es gibt keine gemeinsamen Punkte
$\Rightarrow$ g liegt parallel zu E

Lagebeziehung Ebene -Gerade

g liegt in E



unendlich viele gemeinsame Punkte

E: $-5x_1 + 5x_2 + 1x_3 = -3$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

Geradengleichung als 3 Gleichungen auffassen:

$x_1 = 1 - 3 \cdot r$
$x_2 = 2 + 0 \cdot r$
$x_3 = -8 - 15 \cdot r$

Geradengleichungen in Ebene einsetzen und nach r auflösen:

$-5x_1 + 5x_2 + 1x_3 = -3$
$-5 \cdot (1 - 3r) + 5 \cdot (2 + 0r) + 1 \cdot (-8 - 15r) = -3$
$-5 + 15r + 10 + 0r - 8 - 15r = -3$
$-3 + 0r = -3$
$-3 = -3$ allgemeingültige Aussage

$\Rightarrow$ Die Gleichung hat unendlich viele Lösung
$\Rightarrow$ Die Lösungen sind alle Punkte der Geraden
$\Rightarrow$ g liegt in der Ebene E