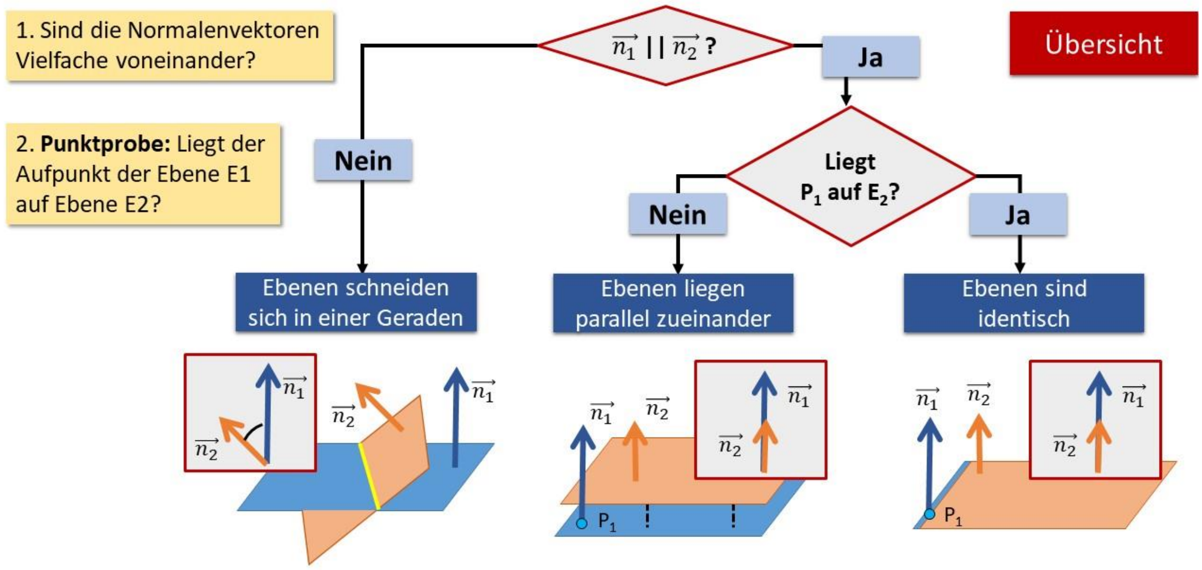
Lagebeziehung Ebene – Ebene

Erklärvideo

Es gibt drei verschiede Möglichkeiten für zwei Ebenen, wie sie zueinander liegen können. Um die drei Fälle mit zwei kurzen Fragen unterscheiden zu können, ist es wichtig, dass man die Normalenvektoren der Ebene kennt. D.h. die Ebenen sollten somit in Normalen- oder Koordinatenform vorliegen, um jeweils den Normalenvektor abzulesen.

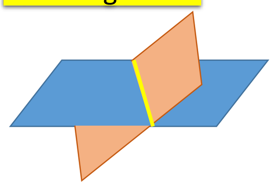


Das Verfahren funktioniert zwar sehr schnell und gut, um die Lagebeziehung zu ermitteln, es hilft jedoch nicht, wenn nach der Schnittgerade zweier sich schneidender Ebenen gefragt wird. In diesem Fall hilft das folgende Rechenverfahren.

Lagebeziehung Ebene - Ebene

Ebenen schneiden sich in einer Geraden

Schnittgerade



E_1: $2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$ E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$

Parametergleichung als 3 Gleichungen auffassen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + 4 \cdot r - 1 \cdot s \\ x_2 &= 2 + 1 \cdot r + 0 \cdot s \\ x_3 &= 3 + 0 \cdot r - 2 \cdot s \end{aligned}$$

Gleichungen in Ebene E_1 einsetzen und z.B. nach r auflösen:

$$2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$$
$$2 \cdot (5 + 4r - 1s) - 6 \cdot (2 + r) + 2 \cdot (3 - 2s) = 12$$
$$10 + 8r - 2s - 12 - 6r + 6 - 4s = 12 \Rightarrow \quad 2r - 6s = 8 \qquad \Rightarrow r = 4 + 3s$$

r in E_2 einsetzen und trennen nach „s" und „nicht s":

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + (4 + 3s) \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}16\\4\\0\end{pmatrix}} + \underbrace{s \cdot \begin{pmatrix}12\\3\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix}21\\6\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}11\\3\\-2\end{pmatrix}$

Sonderfall:

Und dann gibt es noch einen Sonderfall: Schneiden sich zwei Ebenen senkrecht? Um das zu überprüfen, müssen wir nachweisen, dass die Normalenvektoren senkrecht zueinander stehen. Und das macht man natürlich mit dem Skalarprodukt.