

Aufgaben mit Ebenen

	Parameterform	Normalenform	Koordinatenform
Darstellung	$\vec{x} = \vec{p} + r \vec{u} + s \vec{v}$	$[\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n} = 0$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
Spurpunkte			Zur grafischen Darstellung der Ebene die Spurpunkte berechnen. Zwei Koordinaten gleich 0 setzen und jeweils die dritte ausrechnen.
Punktprobe Liegt ein Punkt auf der Ebene?	- Ortsvektor des Punktes einsetzen - das LGS lösen. - Existiert r und s, so dass eine eindeutige Lösung existiert, dann liegt der Punkt auf E.	- Ortsvektor des Punktes einsetzen, - den Differenzvektor und das Skalarprodukt berechnen. - Kommt 0 raus, so liegt der Punkt auf E.	Punkt $(x_1 x_2 x_3)$ einsetzen
Ebenengleichung durch 3 Punkte	$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{AC}$	-	- LGS für $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ aus den 3 Punkten $(x_1 x_2 x_3)$ aufstellen. - Den Wert d wählen und die Koeffizienten a, b und c berechnen.
Gerade in der Ebene angeben	- Stützvektor übernehmen, - als Richtungsvektor einen Spannvektor der Ebene wählen	- Stützvektor übernehmen, - als Richtungsvektor einen Vektor \vec{u} suchen, für den gilt: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Zwei Werte, z.B. n_2 und n_3 wählen und n_1 aus der Gleichung bestimmen.	-
Gerade senkrecht zur Ebene angeben	- Stützvektor übernehmen, - als Richtungsvektor einen Vektor \vec{n} suchen, für den gilt: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Einen Wert, z.B. n_3 wählen und n_1 und n_2 aus LGS bestimmen.	Stützvektor übernehmen, der Richtungsvektor der Gerade ist der Normalenvektor der Ebene	Für den Stützvektor einen Punkt der Ebene ermitteln. Richtungsvektor aus den Koeffizienten der Koordinatenform.
Parallele Ebene durch gegebenen Punkt angeben	Ortsvektor von A als Stützvektor wählen, Richtungsvektoren behalten.	Ortsvektor von A als Stützvektor wählen, Normalenvektor behalten.	Punkt A $(x_1 x_2 x_3)$ in die Ebene $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ einsetzen und das neue d berechnen.
Parallele Ebene angeben	- Einen Punkt finden, der nicht auf der Ebene liegt (siehe „Punktprobe“). - siehe „Parallele Ebene durch einen Punkt“	- Einen Punkt finden, der nicht auf der Ebene liegt (siehe „Punktprobe“). - siehe „Parallele Ebene durch einen Punkt“	- Einen Punkt finden, der nicht auf der Ebene liegt (siehe „Punktprobe“). - siehe „Parallele Ebene durch einen Punkt“ ODER: Den Wert auf der rechten Seite der Koordinatengleichung verändern.

	Parameterform	Normalenform	Koordinatenform
Darstellung	$\vec{x} = \vec{p} + r \vec{u} + s \vec{v}$	$[\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n} = 0$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
Lage Ebene-Gerade ggf. Schnittpunkt mit Gerade bestimmen	Ebene und Gerade gleichsetzen. Das entstehende LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen lösen. Eine Lösung \Rightarrow Schnittpunkt Keine Lösung \Rightarrow Parallel ∞ viele Lösungen \Rightarrow g in E		Die Koordinaten der Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen und nach dem Parameter auflösen. Es gilt: Eine Lösung \Rightarrow Schnittpunkt Keine Lösung \Rightarrow Parallel ∞ viele Lösungen \Rightarrow g in E
Lage Ebene-Ebene Schnitt mit Ebene in Normalenform		Sind die beiden Normalenvektoren keine Vielfache voneinander, so schneiden sich die Ebenen. Aber: Die Schnittgerade kann nicht direkt angegeben werden.	
Lage Ebene-Ebene Schnitt mit Ebene in Koordinatenform	Die Ebene in Parametergleichung als drei Gleichungen auffassen und in die andere Ebene einsetzen. Gleichung lösen. Im Fall einer Lösung diese wieder in die Parametergleichung einsetzen. So erhält man die Gleichung der Schnittgerade.		Die beiden Ebenengleichungen bilden ein LGS mit 2 Gleichungen und 3 Variablen. Forme in Stufenform um und setze z.B. $x_3 = t$. Berechne aus der zweiten Gleichung x_2 und aus der ersten x_1 in Abhängigkeit von t. Durch Auffassen von \vec{x} als $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ erhält man die Gleichung der Schnittgerade.
Lage Ebene-Ebene Schnitt mit Ebene in Parameterform	Die beiden Ebenen gleichsetzen. Man erhält ein LGS mit 3 Gleichungen und 4 Variablen. Hat dieses keine Lösung, so sind die Ebenen parallel. Anderenfalls die letzte Gleichung (nach Stufenform) in die erste Ebene einsetzen. So erhält man die Gleichung der Schnittgerade.	-	Die Ebene in Parametergleichung als drei Gleichungen auffassen und in die andere Ebene einsetzen. Gleichung lösen. Im Fall einer Lösung diese wieder in die Parametergleichung einsetzen. So erhält man die Gleichung der Schnittgerade.
Abstände Abstand eines Punktes von der Ebene	-	Normalen-Einheitsvektor und damit die Hesse'sche Normalenform bestimmen: $[\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n}_0 = 0$ Für den Abstand d zu Punkt R gilt: $d = [\vec{r} - \vec{p}] \cdot \vec{n}_0 $	Für $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und den Punkt R $(r_1 r_2 r_3)$ gilt: $d = \left \frac{ar_1 + br_2 + cr_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right $
Abstände Abstand einer parallelen Geraden zur Ebene	-	- Punkt auf der Geraden bestimmen (siehe Punktprobe) - Abstand des Punktes von der Ebene ermitteln (siehe oben)	- Punkt auf der Geraden bestimmen (siehe Punktprobe) - Abstand des Punktes von der Ebene ermitteln (siehe oben)