Abi Lernblatt: Analysis - Kurvendiskussion

1. Ableitungen

Für die spätere Untersuchung bestimmt man die ersten drei Ableitungen: f ’(x), f ’’(x), f ’’’(x)

Zur Ermittlung der Ableitung helfen die folgenden Regeln:

	$f(x) = x^n$	$\rightarrow$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
	$f(x) = \sin(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = \cos(x)$
	$f(x) = \cos(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = -\sin(x)$
	$f(x) = e^x$	$\rightarrow$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = \ln(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Produktregel:	$f(x) = u(x)\cdot v(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\rightarrow$	$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
Kettenregel:	$f(x) = u \circ v(x)$	$\rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

2. Definitionsbereich

Man bestimmt den Definitionsbereich der Funktion, denn nur innerhalb dieses Bereiches ist es sinnvoll, Untersuchungen über die Eigenschaften der Funktion anzustellen.

Beachte den eingeschränkten Definitionsbereich bei:
Quotienten ($\rightarrow$ Nenner darf nicht Null sein), **Wurzeln** ($\rightarrow$ Wert unter der Wurzel muss positiv sein),
Logarithmus (ln(x) ist nur für $x>0$ definiert).

3. Symmetrien:

Man stellt fest, ob die Funktion achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse oder punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist. Bei einer vorliegenden Symmetrie braucht die Funktion nur noch für $x \geq 0$ untersucht werden.

Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$
Bei ganzrationale Funktionen: Es kommen nur Summanden mit geraden Exponenten vor.
Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
Bei ganzrationale Funktionen: Es kommen nur Summanden mit ungeraden Exponenten vor.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

Man sucht für das spätere Zeichnen des Graphen die Schnittpunkte mit den Achsen. Ggf. eine Nullstelle raten und anschließend eine Polynomdivision durchführen.

Nullstellen:
Nullstellen sind Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.
Schnittstelle mit der y-Achse:
Bestimme f(0).

Tipp: Versuche f(x) als Faktoren darzustellen und überprüfe, wann die Faktoren Null werden. **Beachte:** e^x wird nie Null.

5. Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ bzw. gegen Definitionslücken

Untersuchung der Funktion an den Randpunkten des Definitionsbereichs. Wenn der Definitionsbereich nicht beschränkt ist, dann sind die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ zu bestimmen. Für Definitions-lücken a ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a\pm} f(x)$ von links und rechts zu bestimmen.

Das Verhalten bei rationalen Funktionen wird durch den größten Exponenten bestimmt.

Satz von De l’ Hospital
Bei Quotienten, bei denen der Grenzwert des Zählers und des Nenners 0 ist, hilft es die jeweilige Steigung zu betrachten, um zu ermitteln, welcher Term schneller gegen 0 geht. So benutzt man den **Satz von De l’ Hospital:**

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$$ falls u(a) = v(a) = 0 sowie u(x) und v(x) differenzierbar

6. Extrempunkte und Monotonieverhalten

Bestimmen der relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte). Nach den Extremstellen auch die Extrempunkte bestimmen!

Extrema:
Notwendige Bedingung:
$f'(x)=0$

Hinreichende Bedingung:
$f''(x)<0 \Rightarrow$ Maximum/Hochpunkt
$f''(x)>0 \Rightarrow$ Minimum/Tiefpunkt

Vorzeichenwechselkriterium:
$f'(x)=0$ und $f''(x)=0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ untersuchen
$f'(x)$ wechselt von + nach – $\Rightarrow$ Wechsel von mon. steigend $\rightarrow$ mon. fallend $\Rightarrow$ Maximum
$f'(x)$ wechselt von – nach + $\Rightarrow$ Wechsel von mon. fallend $\rightarrow$ mon. steigend $\Rightarrow$ Minimum

Monotonie:
$f'(x)>0 \Rightarrow$ monoton steigend $\qquad$ $f'(x)<0 \Rightarrow$ monoton fallend

Vorzeichenwechselkriterium:
Beispiel: $f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24x$
Es ist $f'(0) = 0$, aber auch $f''(0) = 0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechselkriterium für $f'(x)$
Schreibe $f'(x)$ in Faktoren: $f'(x) = 4x^2(x-3)$ und betrachte die Vorzeichen an den Stellen, an denen jeweils ein Faktor Null wird, sowie in den Intervallen dazwischen.

Werte für x	Faktoren			f '(x)
	4	x^2	(x-3)	$4x^2(x-3)$
$x < 0$	+	+	-	**-**
$x = 0$	+	0	-	**0**
$0 < x < 3$	+	+	-	**-**
$x = 3$	+	+	0	**0**
$x > 3$	+	+	+	**+**

kein Vorzeichenwechsel

Vorzeichenwechsel

$\Rightarrow$ Kein Extremum bei x=0, dafür Minimum bei x=3 wegen Vorzeichenwechsel von – nach +

7. Wendepunkte und Krümmungsverhalten

Bestimmen der Wendepunkte, bzw. der Sattelpunkte

Wendepunkt:
$f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt
Sattelpunkt:
$f'(x)=0$ und $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Vorzeichenwechselkriterium:
$f''(x)=0$ und $f'''(x)=0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ untersuchen
$f''(x)$ wechselt von + nach – $\Rightarrow$ Wechsel von linksgekrümmt $\rightarrow$ rechtsgekrümmt
$f''(x)$ wechselt von – nach + $\Rightarrow$ Wechsel von rechtsgekrümmt $\rightarrow$ linksgekrümmt

Krümmungsverhalten:
$f''(x)>0 \Rightarrow$ linksgekrümmt $\qquad$ $f''(x)<0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt

(Wende-)Tangente:
Bestimmung der Gleichung einer (Wende-)Tangente: Die Tangentengleichung ist allgemein: $y = mx + b$
Die Steigung m entspricht der Steigung des Graphen im gesuchten Punkt, d.h. $m = f'(x_0)$
Einsetzen des Punktes $(x_0, f(x_0))$ ergibt die Tangentengleichung.

Beispiel: $f(x) = x^4 - 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ und $f''(x) = 12x^2 - 12x \Rightarrow$ Wendepunkt bei (1|-1)
$m = f'(1) = -2 \Rightarrow$ Tangente: $y = -2x + b$
Einsetzen von (1|-1) : $-1 = -2\cdot 1 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$ Tangentengleichung : $y = -2x + 1$

8. Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ (auch $\bar{f}(x)$ genannt) erhält man, indem man in der Funktionsvorschrift $y = f(x)$ einer umkehrbaren Funktion die Variablen y und x vertauscht und anschließend nach y auflöst. Die Bestimmung des Graphen der Umkehrfunktion erfolgt auch durch Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Beispiel: $y = 2x + 6 \Rightarrow$ Vertauschen : $x = 2y + 6 \Rightarrow x - 6 = 2y \Rightarrow 0{,}5x - 3 = y \Rightarrow$ Umkehrfkt. : $f^{-1}(x) = 0{,}5x - 3$

9. Graph zeichnen

Alle bekannten Punkte (Nullstellen, y-Achsenabschnitt, Extrema, Wendepunkte), Asymptoten und das Verhalten gegen $\pm\infty$ sowie gegen Definitionslücken einzeichnen. Ggf. weitere Punkte in kleiner Wertetabelle berechnen.

Schräge Asymptoten:
Schräge Asymptoten entstehen immer bei rationalen Funktionen, wenn der Zählergrad **um 1 größer** ist als der Nennergrad und wenn bei einem Grenzwert für $x \to \infty$ auch ∞ herauskommt. Sie haben die Gleichung y = mx + b
Berechnung der Asymptotengleichung durch Polynomdivision.

Beispiel:

f(x) = $\frac{x^2+6x}{3x+9}$ $\Rightarrow$ Polynomdivision $(x^2 + 6x) : (3x + 9) = \frac{1}{3}x+1-\frac{9}{3x+9}$

Die Asymptotengleichung ist: y = $\frac{1}{3}x+1$, da das Restglied für große x gegen 0 geht.

10. Flächenberechnung

Bestimme eine Stammfunktion F(x) zu f(x) und berechne das Intergral in den gegebenen Grenzen:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

Hilfen zur Integration:

f(x) = x^n	$\rightarrow$	F(x) = $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
f(x) = sin (x)	$\rightarrow$	F(x) = - cos (x)
f(x) = cos (x)	$\rightarrow$	F(x) = sin (x)
f(x) = $\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\rightarrow$	F(x) = ln (|g(x)|)

Partielle Integration: $\int f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x)dx$

Ziel hierbei ist es beim zu integrierenden Produkt f '(x) und g(x) so zu wählen, dass der Term g '(x) so einfach wie möglich wird (am besten eine Konstante, d.h. ohne x). Ggf. hilft ein weiteres Anwenden der partiellen Integration auf das rechte Integral, wenn sich dieses noch nicht lösen lässt.

$\int x \cdot e^x dx$: Wähle f '(x) = e^x und g(x) = x $\Rightarrow$ f(x) = e^x und g '(x) = 1

$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

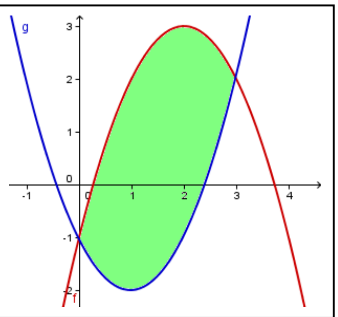
Integration durch Substitution: *Beispiel*: $\int e^{2x}dx$

1. Ersetze g(x) durch u. — Substitution: 2x = u
2. Leite die Funktion u nach x ab — $\frac{du}{dx} = 2$
3. Nach dx auflösen und in Integral einsetzen — dx = 0,5 du $\Rightarrow$ $\int e^u \cdot 0{,}5du$
4. Integrieren und rücksubstituieren — $\int e^u \cdot 0{,}5du$ = 0,5 e^u = 0,5 e^{2x}

Fläche zwischen zwei Graphen:
Wird eine Fläche von zwei Kurven f(x) und g(x) begrenzt, so kann man die von ihnen begrenzte Fläche wie folgt berechnen:

A = $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$

Die Integrationsgrenzen a und b sind jeweils die x-Werte der Schnittpunktkoordinaten beider Graphen



11. Ortskurve

Bei Funktionsscharen $f_t(x)$: Um Ortskurven von Extrem-/Wendepunkten zu bestimmen, geht man wie folgt vor:

- Die x-Koordinate der Extrempunkte nach t auflösen
- Dieses t in $f_t(x)$ einsetzen. Man erhält dadurch die von x abhängige Funktion der Ortskurve.