1. Kursarbeit in Mathematik	13 Ma L3	05.11.2010
Name:		
Rohpunkte:	MSS-Punkte:	Note:

Aufgabe 1: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x)=x^2(a-\ln(x))$, $x\in IR$, $x>0$, $a\in IR$, $a\geq 0$. Der zu f_a gehörige Graph sei G_a.

a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse und die Extrempunkte. Zeige, dass jeder Graph G_a einen Wendepunkt hat.
b) Zeige, dass alle Extrempunkte der Schar auf einer Parabel liegen.
c) Bestimme die Gleichung der Wendetangente für den Graph $G_{1,5}$.
d) Um eine Flächenberechnung vorzunehmen, wird f_2 durch eine quadratische Funktion p mit der Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$ angenähert. Dabei sollen die Punkte O (0|0), E (4,5|10) und N(7,5|0) Punkte des Graphen von p sein.
Berechne den Flächeninhalt, der vom Graphen von p und der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine Ebene E_1 durch die Punkte A (1|-2|3) , B (6|3|-2) und C(0|6|1), eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und eine Gerade h durch die Punkte P (7|2|7) und Q (-11|-1|-8) gegeben.

a) Gib die Ebene E_1 in Koordinatenform an. Die Ebene E_1 schneidet die x_2-x_3-Ebene des Koordinatensystems in der Geraden s. Gib eine Gleichung für diese Gerade an.
b) Stelle die Gerade s und das Dreieck ABC in demselben Koordinatensystem dar.
c) Die Geraden g und h schneiden sich in einem Punkt S. Zeige, dass S in der Ebene E_1 liegt.
d) Zeige, dass die Geraden g und h symmetrisch bzgl. der Ebene E_1 liegen.
e) Die Ebene E_2 verläuft durch den Punkt A (1|-2|3) und senkrecht zur Geraden g. Bestimme eine Gleichung der Ebene E_2. Berechne den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E_2.

Aufgabe 3: Stochastik

I) Es werden hintereinander zwei Würfel geworfen. Würfel 1 hat die Augenzahlen 1,1,2,2,2,4, Würfel 2 hat die Augenzahlen 2,2,2,5,5,5. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augensumme der beiden Würfe an. Bestimme den Erwartungswert und die Varianz.

II) Ein Betrieb stellt Batterien her. Bei der Produktion besitzen 2% der Batterien Produktionsfehler und sind defekt.

a) Tanja kauft 4 Batterien. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser Batterien defekt sind.
b) Die Batterien werden für den Versand an Einzelhändler in Kartons zu je 100 Stück verpackt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Karton höchstens 2 der Batterien defekt sind.
c) Wie viele Batterien muss man mindestens aus dem Produktionsprozess entnehmen, bis man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% mindestens eine defekte Batterie in den Händen hält?
d) Zur Qualitätsprüfung übernimmt ein Testgerät die Endkontrolle der Batterien. Das Testgerät erkennt 99% der defekten Batterien korrekt. Bei funktionsfähigen Batterien erkennt das Gerät zu 98% das die Batterie funktioniert. Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Batterie defekt ist, wenn das Testgerät dies anzeigt. Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Batterie defekt ist, wenn das Testgerät anzeigt, dass diese funktioniert.

Lösungen: Analysis

5.1 Schnittpunkte mit der x-Achse: $0 = x^2(a - \ln x)$

Wegen $x > 0$ folgt: $0 = a - \ln x$

$\ln x = a \quad \Rightarrow x = e^a$ und $P_x(e^a | 0)$

Extrempunkte von G_a:

$f_a'(x) = 2x(a - \ln x) + x^2(-\frac{1}{x}) = x(2a - 2\ln x - 1)$

$f_a''(x) = (2a - 2\ln x - 1) + x(-\frac{2}{x}) = -2\ln x + 2a - 3$

$f_a'(x) = 0$: $x(2a - 2\ln x - 1) = 0$

Wegen $x > 0$ folgt $\quad 2a - 2\ln x - 1 = 0$

$\ln x = a - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = e^{a-0,5}$

$f_a''(e^{a-0,5}) = -2(a - \frac{1}{2}) + 2a - 3 = -2 < 0$

$f_a(e^{a-0,5}) = e^{2a-1}(a - a + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{2a-1} \quad \Rightarrow P_{max}(e^{a-0,5} | \frac{1}{2}e^{2a-1})$

Wendepunkte:

$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\ln x + 2a + 3 = 0$

$\ln x = a - 1,5 \quad \Rightarrow x = e^{a-1,5}$

$f_a'''(x) = \frac{-2}{x} \neq 0$ für alle x, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Damit ist gezeigt, dass jeder Graph G_a einen Wendepunkt besitzt:

$f_a(e^{a-1,5}) = e^{2a-3}(a - a + 1,5) = 1,5e^{2a-3} \quad \Rightarrow P_W(e^{a-1,5} | 1,5e^{2a-3})$

Wendetangente für a=1,5 $\Rightarrow$ WP (1|...) $\Rightarrow$ $m = f_{1,5}'(1) = 3 - 2\ln(1) - 1 = 2$

$f_{1,5}(1) = 1,5 \Rightarrow y = 2x + b \Rightarrow 1,5 = 2 + b \Rightarrow b = -0,5 \Rightarrow y = 2x - 0,5$

5.2 Die Extrempunkte haben die Koordinaten $x_E = e^{a-0,5}$ und $y_E = \frac{1}{2}e^{2a-1}$.

Da $y_E = \frac{1}{2}e^{2a-1} = \frac{1}{2}(e^{a-0,5})^2 = \frac{1}{2}x_E^2$, liegen alle Extrempunkte der Kurvenschar auf der Parabel $y_E = \frac{1}{2}x_E^2$.

5.4 Flächenberechnung:

Die Funktion f ist angenähert durch $p(x) = ax^2 + bx + c$,

wobei O(0| 0), E(4,5| 10)und N(7,5| 0) Punkte des Graphen von p sind.

Bestimmen der Parameter a, b, und c:

Aus $O \in p$ folgt: $\quad 0 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \quad \Rightarrow c = 0$

Aus E, $N \in p$ folgt: I. $\quad 10 = a\cdot 4,5^2 + b\cdot 4,5$

$\underline{0 = a\cdot 7,5^2 + b\cdot 7,5}$

$\Rightarrow b = -\frac{a\cdot 7,5^2}{7,5} = -7,5a$

$10 = 20,25a + (-7,5a)4,5 = -13,5a \quad \Rightarrow a = -\frac{20}{27}$

$b = -\frac{75}{10}(-\frac{20}{27}) = \frac{50}{9} \quad \Rightarrow p(x) = -\frac{20}{27}x^2 + \frac{50}{9}x$

Ermitteln der Integrationsgrenzen (Nullstellen von p):

$0 = -\frac{20}{27}x^2 + \frac{50}{9}x \Rightarrow -2x^2 + 15x = 0$

$x(-2x + 15) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{15}{2}$

Flächeninhalt:

$$\int_0^{7,5}\left(-\frac{20}{27}x^2 + \frac{50}{9}x\right)dx = \left[-\frac{20}{81}x^3 + \frac{50}{18}x^2\right]_0^{7,5} \approx -104,17 + 156,25 = 52,08$$

$A \approx 52,1$ FE

Lösung:

Algebra

6.1 Koordinatengleichung für ε_1:

$$\varepsilon_1: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & x = & 1 + 5r - s \\ \text{(II)} & y = & -2 + 5r + 8s \\ \text{(III)} & z = & 3 - 5r - 2s \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} + \text{(III)}: & x + y = 4 - 3s \\ \text{(II)} + \text{(III)}: & y + z = 1 + 6s \\ \hline & 2x + 2z + y + z = 9 \end{array} \qquad \Rightarrow \varepsilon_1: 2x + y + 3z - 9 = 0$$

Lösungsvariante:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 5 & 5 & -5 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} = (-10 + 40)i - (-10 - 5)j + (40 + 5)k = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } \varepsilon_1: 2x + y + 3z = 9$$

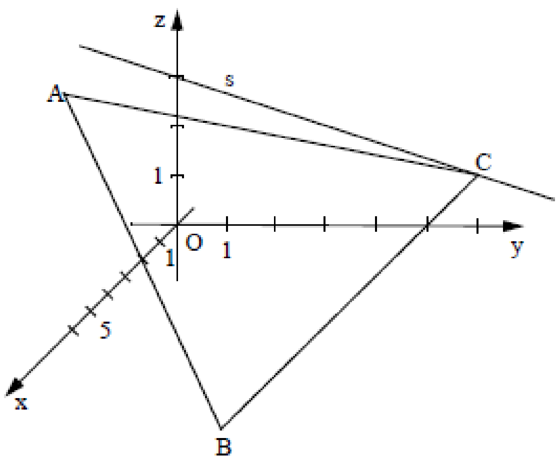
Schnittgerade s:

ε_1: $2x + y + 3z - 9 = 0$ y-z-Ebene: $x = 0$

Mit $x = 0$ folgt aus ε_1: $y + 3z - 9 = 0$ bzw. $z = -\frac{1}{3}y + 3$

$$\text{oder vektoriell} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Darstellung von Dreieck ABC und Schnittgerade s:



6.2 Schnittpunkt $S = g \cap h$ ermitteln:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}; t \notin \mathbb{R} \quad h: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -18 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix}; r \notin \mathbb{R}$$

$g \cap h$: (I) $3 + 2t = 7 - 18r$

(II) $4 + 3t = 2 - 3r$

(III) $9 + 7t = 7 - 15r$

(I) – 6(II): $21 + 16t = 5 \qquad \Rightarrow t = -1$

(I) und $t = -1$: $3 - 2 = 7 - 18r \qquad \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

Den Wert für t bzw. r in die Gleichung für g bzw. h eingesetzt, ergibt die Koordinaten des Schnittpunktes S:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -18 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

also $S(1|\,1|\,2)$

Überprüfen, ob $S \in \varepsilon_1$:

S in ε_1 eingesetzt: $2x_s + y_s + 3z_s - 9 = 0$

$2 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 2 - 9 = 0$

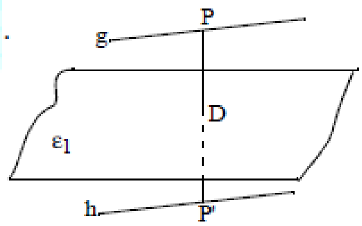
$9 - 9 = 0$ (wahre Aussage) $\Rightarrow$ S liegt in ε_1.

6.3 Aufstellen einer zu ε_1 senkrechten Geraden durch $P(3|\,4|\,9) \in g$:

$P(3|\,4|\,9) \in g$, denn für g gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Aus ε_1: $2x + y + 3z - 9 = 0$

folgt $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{e} \perp \varepsilon_1$.



Eine zu ε_1 senkrechte Gerade durch P: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Durchstoßpunkt D dieser Geraden durch ε_1:

Aus ε_1: $2x + y + 3z = 9$ folgt mit $x = 3 + 2r$, $y = 4 + r$ und $z = 9 + 3r$:

$2(3 + 2r) + (4 + r) + 3(9 + 3r) = 9$

$37 + 14r = 9 \qquad \Rightarrow r = -2$

$$\begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow D(-1|\,2|\,3)$$

Ermitteln eines zu P symmetrisch liegenden Punktes P':

Es gilt: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{PD}$

Mit $\overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ folgt $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, also P'(−5| 0| −3).

Prüfen, ob $P' \in h$:

P'(−5| 0| −3) in h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -18 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix}$ eingesetzt, ergibt:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & -5 = 7 - 18r \\ \text{(II)} & 0 = 2 - 3r \\ \text{(III)} & -3 = 7 - 15r \end{array} \quad \Rightarrow r = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{(I')} \ -5 = 7 - 18\cdot\frac{2}{3} \ \text{(wahre Aussage)} \\ \text{(II')} \ -3 = 7 - 15\cdot\frac{2}{3} \ \text{(wahre Aussage)} \end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass P' auf h liegt; somit liegen die Geraden g und h bezüglich der Ebene ε_1 symmetrisch.

6.4 Gleichung für ε_2:

Mithilfe des Punktes A(1| − 2| 3) und des zu ε_2 senkrecht stehenden Richtungsvektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ der Geraden g erhält man: $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0.$

Die skalare Multiplikation liefert schließlich eine Koordinatengleichung:

$$2(x-1) + 3(y+2) + 7(z-3) = 0$$
$$2x - 2 + 3y + 6 + 7z - 21 = 0$$
$$2x + 3y + 7z - 17 = 0$$

Abstand des Koordinatenursprungs von ε_2:

$$e = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+9+49}} \right| = \frac{17}{\sqrt{62}} \approx 2{,}16$$

Der Abstand beträgt 2,16 LE.

Lösung:

Stochastik

Ansatz für klassischen Lösungsweg:

$$P(C=2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^2$$

Wahrscheinlichkeit, dass in einem Karton höchstens 2 % der Batterien Ausschuss sind: 2 % von 100 Batterien sind 2 Batterien.

Klassischer Ansatz:

$$P(D \le 2) = \binom{100}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98}$$

c)
Wie viele Batterien muss man mindestens aus dem Produktionsprozess entnehmen, bis man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% mindestens eine defekte Batterie in den Händen hält?

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) > 80\%$
$\Rightarrow 1 - P(X=0) > 0{,}8$
$\Rightarrow 0{,}2 > P(X=0)$
$\Rightarrow 0{,}2 > 0{,}98^n$
$\Rightarrow \ln(0{,}2) > n \ln(0{,}98)$
$\Rightarrow \ln(0{,}2):\ln(0{,}98) < n$
$\Rightarrow 79{,}66 < n$

d)
A: Batterie ist defekt, B: Test ist positiv
$P(A) = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 0{,}98$
$P_A(B) = 0{,}99 \qquad P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}98$
Gesucht: $P_B(A)$, $P_{\overline{B}}(A)$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P_A(B)\ P(A) = 0{,}99 \,.\, 0{,}02 = 0{,}0198$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) \ P(\overline{A}) = 0{,}98 \,.\, 0{,}98 = 0{,}9604$

	B **: Test pos**	$\overline{B}$ **: Test neg**	**Summe**
A **: defekt**	$P(A \cap B)$ =0,0198	$P(A \cap \overline{B})$ =0,0002	$P(A)$ =0,02
$\overline{A}$ **: ganz**	$P(\overline{A} \cap B)$ = 0,0196	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 0,9604	$P(\overline{A})$ =0,98
Summe	$P(B)$ = 0,0394	$P(\overline{B})$ = 0,9606	1

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}0198 / 0{,}0394 = 0{,}50$

$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 0{,}0002 / 0{,}9606 = 0{,}0002082$