LK 12 Mathematik, Straßer Leistungskurs

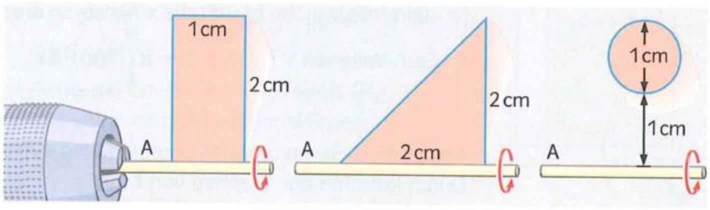
KW16; Stoff für 20.04 – 24.04.2020

Wir wollen die Integration durch Substitution hinter uns lassen und ein neues Kapitel in der Integralrechnung aufschlagen… Das Volumen von Rotationskörpern. (Neue Seite… neue Überschrift)

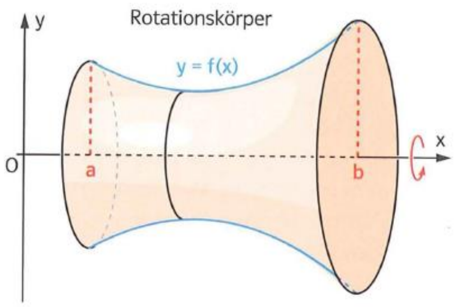
➔ Was ist ein Rotationskörper?

Aus unserem Buch:

Die gefärbten Flächen werden schnell um die Achse A einer Bohrmaschine gedreht. Es entsteht so die Illusion eines Körpers. Beschreiben Sie die entstehenden Körper.



Mit dem Integral wurden bisher Fragestellungen zu den Themen Flächeninhalt und Änderung von Größen bearbeitet. Mit demselben Konzept kann man auch Rauminhalte von Körpern bestimmen, insbesondere von **Rotationskörpern**. Ein Rotationskörper entsteht, wenn die vom Graphen einer Funktion f über dem Intervall [a; b] eingeschlossene Fläche (orange in Fig. 1) um die x-Achse rotiert.



Statt Rotationskörper sagt man auch **Drehkörper**.

➔ Welche Körper entstehen bei der Rotation der Flächen von oben? Beschreibe…

➔ Zur Vorstellung auch ganz gut geeignet: https://www.geogebra.org/m/xmaSSRCs hier kannst du verschiedene Funktionen eingeben, z.B. f(x)=x und den Schieberegler beim Winkel bedienen… so entsteht ein Rotationskörper.

➔ Gut zur Herleitung einer Formel für das Volumen eines Rotationsköpers: https://www.geogebra.org/m/YAVfuxqD .... hier kann man die „Scheiben“ bei Ober- und Untersumme sehr gut erkennen. Einfach mal ein bisschen rumspielen. Probiere auch: https://www.geogebra.org/m/WkWPXhhu#material/Buz3SdxF.

Offenbar machen wir in diesem Kapitel einen Abstecher in die Volumenberechnung, nachdem wir mit dem Integralbegriff bisher meist „Flächen“, d.h. eine Größe in einer Zeichenebenen bestimmt haben. Jetzt verlassen wir die Ebene und führen Berechnungen im Raum durch… allerdings nur für Körper, die als Rotationskörper interpretiert werden können. Damit ist die Volumenbestimmung etwas eingeschränkt.

Innermathematisch zeigt sich, dass die Überlegungen, die wir zum Beginn beim Integralbegriff angestellt haben, sich wiederholen: Wir werden zur Bestimmung einer Formel für das Volumen eines Rotationskörpers wieder mit einer Art „Untersumme“ und „Obersumme“ arbeiten! {das freut das Mathematikerherz… die Theorie von damals lässt sich quasi verallgemeinern! Toll!}

➔ Herleitung einer Formel für das Volumen eines Rotationskörpers:

Die Bestimmung des Volumens bei Rotationskörpern orientiert sich am Verfahren zur Bestimmung von Flächeninhalten.

Fig. 1

Flächeninhalte

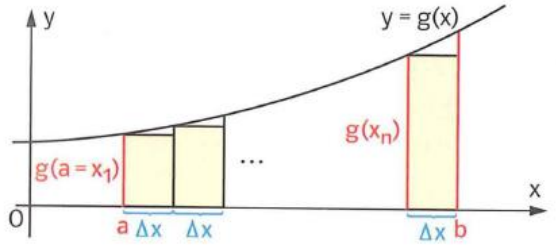


Fig. 2

Rauminhalte

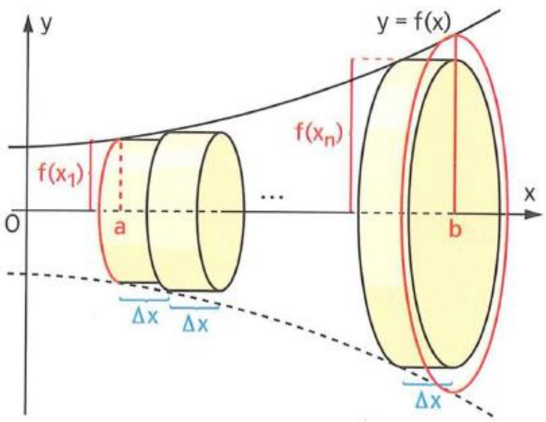


Fig. 3

1. Schritt: Die Fläche wird mit gleich breiten Rechtecken angenähert. Jedes Rechteck hat die Breite Δx.

1. Schritt: Der Körper wird mit gleich breiten Zylindern angenähert. Jeder Zylinder hat die Höhe Δx.

→ dies konnten wir schon in den Videos gut nachvollziehen. Wir füllen den Rotationskörper also mit (dünnen) „Scheibchen“ (Zylindern), von denen wir bei jedem einzelnen Scheibchen das Volumen bestimmen können, wenn wir den Radius und die Höhe des Zylinders kennen!

Fig. 3

1. Schritt: Die Fläche wird mit gleich breiten Rechtecken angenähert. Jedes Rechteck hat die Breite Δx.
Der Flächeninhalt aller Rechtecke ist
$A_n = g(x_1)\cdot\Delta x + g(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + g(x_n)\cdot\Delta x \quad (*)$.

2. Schritt: Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Dieser Grenzwert entspricht nach Definition dem Integral $\int_a^b g(x)\,dx$.

1. Schritt: Der Körper wird mit gleich breiten Zylindern angenähert. Jeder Zylinder hat die Höhe Δx.
Das Volumen aller Zylinder ist
$V_n = \pi(f(x_1))^2\cdot\Delta x + \pi(f(x_2))^2\cdot\Delta x + \ldots + \pi(f(x_n))^2\cdot\Delta x$.
Dies entspricht einer Summe wie (*), wenn man $g(x) = \pi\cdot(f(x))^2$ setzt.

2. Schritt: Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$. Dieser entspricht dem Integral
$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \pi\cdot(f(x))^2\,dx = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

Am Ende ergibt sich also durch die Analogie eine Formel zum Berechnen des Volumen des Rotationskörpers.

Satz: Die Funktion f sei auf [a; b] stetig. Rotiert die Fläche unter dem Graphen von f über dem Intervall [a; b] um die x-Achse, so entsteht ein **Rotationskörper**.
Sein **Volumen** V beträgt $\mathbf{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx}$.

➔ Diese Herleitung solltest du verstehen. Übertrage sie in dein Heft. Organisiere das selbst… ausdrucken… abschreiben… umformulieren… das ist mir egal… aber die wesentlichen Gedanken sollten auch in deinem Heft zu finden sein.

Die Formel zeigt, dass man zur Berechnung des Volumens des Rotationskörpers nur die Grenzen und die Funktion f benötigt, deren Graph den Körper begrenzt. Damit wollen wir in die Berechnung einsteigen.

➔ Bearbeite Nummer 1+2 komplett und nutze dazu Beispiel 1, wo eine Rechnung vorgeführt wird. Etwas schwieriger wird es bei Nummer 8+10. Doch auch diese sind machbar.
➔ Du kannst auch die Erklärvideos der bekannten Seiten (Daniel Jung, Lehrer S., Simple Club durchschauen… zur Ergänzung nicht schlecht. Oder auch einfach mathe… dort erklärt mal eine Frau… wer gar nicht zurechtkommt wird da fündig…)

Ich denke wir werden diese Woche noch miteinander in Kontakt treten. Sei es zum Austausch von Hilfestellungen, euren Lösungsversuchen oder Musterlösungen. Ich melde mich in jedem Fall.

So … jetzt fleißig arbeiten und am Ball bleiben… das ist jetzt wie im Studium später… keiner fragt ob du was machst… du bist selbst verantwortlich … wenn du durchgefallen bist fragt aber auch niemand nach dir… selbst Schuld…

Also ganz so schlimm soll es nicht sein, aber ihr lernt gerade auch eure Zeit sinnvoll einzusetzen und eigenverantwortlich zu handeln ohne dass euch jemand auf die Finger schaut.

Bis dahin…

Clemens Straßer, Lehrer des besten Mathe-Lk12