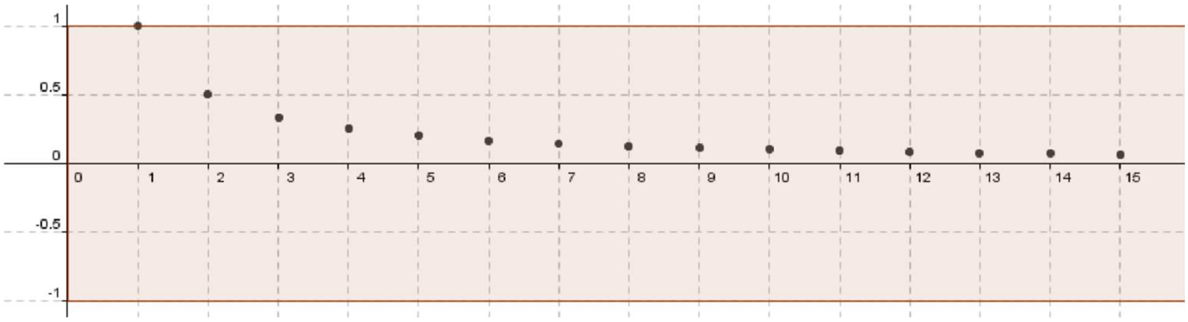
# <u>Von Grenzwerten und ε-Umgebungen</u>

*Das folgende fiktive Gespräch dient hoffentlich dem Verständnis, wie sich mit Hilfe einer ε-Umgebung zeigen lässt, dass eine Folge einen Grenzwert hat und wieso diese ε-Umgebung nötig ist.*

**Lehrer:** Schauen wir uns einmal die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ an.

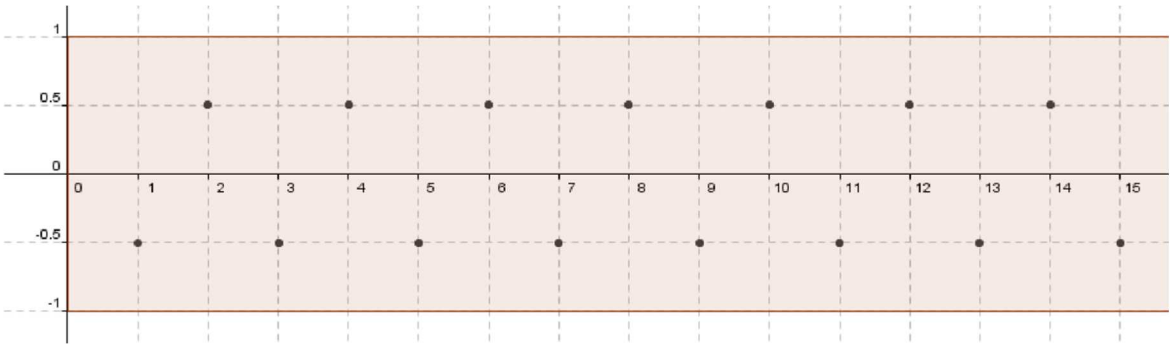



Wir haben uns überlegt, dass diese Folge den Grenzwert g=0 hat. Die Folgenglieder nähern sich scheinbar immer mehr der 0 an. Wie lässt sich denn sinnvoll überprüfen, ob die Folge auch wirklich einen Grenzwert hat?

**Schüler 1:** Ganz einfach. Wir überprüfen, ab welchem Folgenglied alle Werte in einer 1er Umgebung um den Grenzwert, also um 0 liegen, d.h. wann sie alle kleiner sind als 1 und größer als -1.

**Schüler 2:** Genau. Die liegen alle drin. Die Folge hat also einen Grenzwert.

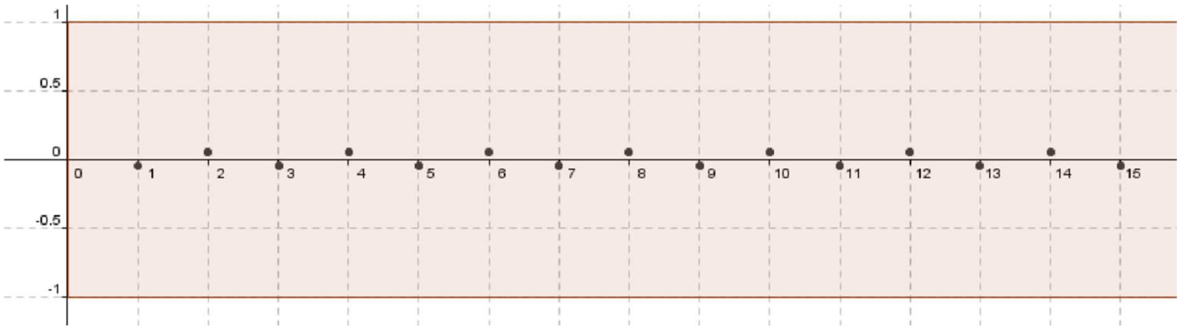
**Lehrer:** Und was ist mit der Folge $a_n = 0{,}5 \cdot (-1)^n$ ?




**Schüler 2:** Ähh. Da liegen auch alle Folgenglieder drin. Aber man sieht schnell, dass diese Folge keinen Grenzwert hat. Also, so taugt das nicht als Definition.

**Schüler 1:** Dann nehmen wir eben eine kleinere Umgebung, zum Beispiel 0,1. Dann liegen für unsere Folge ab dem 10. Folgenglied alle Folgenglieder in der Umgebung. Und für die andere Folge ist gar kein Folgenglied in der Umgebung, also hat sie auch kein Grenzwert. So haben wir dann unsere Definition für die Existenz eines Grenzwertes von Folgen.

**Lehrer:** Nicht so schnell. Versuche es mal mit der Folge $a_n = 0{,}05 \cdot (-1)^n$ ?




**Schüler 2:** Das ist ja unfair. Da liegen jetzt auch wieder alle Folgenglieder in unserer 1er-Umgebung, obwohl die Folge keinen Grenzwert hat.

**Schüler 1:** Kein Problem. Dann machen wir die Umgebung noch kleiner und nehmen diesmal eine richtig kleine Umgebung wie zum Beispiel 0,01.

**Schüler 2:** Das bringt doch nichts. Dann findet unser Lehrer auch hier wieder ein Gegenbeispiel.

**Schüler 1:** Dann machen wir die Umgebung einfach unendlich klein.

**Schüler 2:** Aber wie soll ich denn für eine unendlich kleine Umgebung rausfinden, ab welchem Folgenglied alle Folgenglieder in der Umgebung liegen?

**Schüler 1:** Also bei einer 1er-Umgebung ist es das 1. Folgenglied. Bei einer 0,1er-Umgebung das 10. Folgenglied und bei einer 0,01er-Umgebung das 100. Folgenglied. Aber bei unendlich?

**Schüler 2:** Ich glaube ich habe eine Idee. Wenn unser Lehrer eine winzige Umgebung vorgibt, nennen wir sie mal ε (für <u>ε</u>xtrem klein), dann finde ich immer das passende Folgenglied für unsere Funktion, ab dem alle Folgenglieder in der Umgebung liegen. Ich habe nämlich eine Formel zur Berechnung. Ich stelle die Formel $a_n < \varepsilon$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$ nach n um. Jetzt kann ich zu jeder noch so kleinen Umgebung das Folgenglied angeben - egal was der Lehrer vorgibt. Damit habe ich bewiesen, dass unsere Funktion einen Grenzwert hat. Und für jede andere Funktion, die keinen Grenzwert hat, lässt sich keine solche Formel finden.

**Schüler 1:** Dann können wir also definieren, dass eine Folge einen Grenzwert hat, wenn wir nicht nur für eine bestimmte, sondern für alle noch so kleinen Umgebungen ein Folgenglied finden können, so dass ab diesem alle Folgenglieder in der Umgebung liegen.

**Schüler 2:** Genau. Und da wir nicht alle unendlich vielen Umgebungen untersuchen können (da würde ja unendlich lange dauern) finden wir einfach eine Formel für jede vorgegebene Umgebung ε. Damit ist dann alles klar.

**Lehrer:** Genau so machen wir es. Das können wir als Definition übernehmen.