Gleichungen von Kreis und Kugel

Gegeben ist der Punkt M(3|2|5). Alle Punkte X im Raum mit dem Ortsvektor $\vec{x}$, die von M den (festen) Abstand $r = 3$ haben, liegen auf einer **Kugel um M mit dem Radius r**. Für $\vec{x}$ gilt dann: $|\overrightarrow{MX}| = 3$ und damit $|\overrightarrow{MX}|^2 = 9$. Also lautet die Kugelgleichung $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\right)^2 = 9$.

Im Zweidimensionalen liegen Punkte mit dem Ortsvektor $\vec{x}$, der die Bedingung $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ erfüllt, auf einem **Kreis** um M mit dem Radius r.

1 Lesen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Kugel ab und bestimmen Sie deren Radius.

a) $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right)^2 = 16$; M(| |); r =

b) $\left(\vec{x} + \begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}\right)^2 = 225$; M(| |); r =

2 P(2|1|−1) ist ein Punkt auf der Kugel um den Punkt M(4|2|−3).

a) Geben Sie eine Kugelgleichung in Vektordarstellung und in Koordinatendarstellung an.

Radius $r = |\overrightarrow{MP}| = \left|\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\ ^2 + \ ^2 + \ ^2} =$; Kugelgleichung in Vektordarstellung: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right)^2 =$

Dies bedeutet umgeschrieben $\begin{pmatrix}x_1 - \\ x_2 - \\ x_3 + \end{pmatrix}^2 =$, also $(x_1 - \quad)^2 + (x_2 - \quad)^2 + (x_3 + \quad)^2 =$.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt R(5|0|−1) auf der Kugel liegt, S(4|3|3) und T(2|2|−3) jedoch nicht.

Berechnen des Abstandes von R zu M: $|\overrightarrow{MR}| = \left|\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right| = \quad = r$

Abstand von S zu M: $|\overrightarrow{MS}| = \left|\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right| =$ Abstand von T zu M: $|\overrightarrow{MT}| = \left|\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right| =$

Damit liegt S ______________________ der Kugel. Damit liegt T ______________________ der Kugel.

3 Ein Würfel ist durch die vier Eckpunkte O(0|0|0), A(4|0|0), B(4|4|0) und C(4|4|4) festgelegt. Dem Würfel wird eine Kugel einbeschrieben, die sämtliche Würfelflächen berührt.

a) Bestimmen Sie eine Kugelgleichung in Vektor- und Koordinatendarstellung.

Mittelpunkt der Kugel: M(| |), Radius der Kugel: r = . Kugel in Vektordarstellung:

$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\right)^2 =$ und in Koordinatendarstellung: $(x_1 - \quad)^2 + (x_2 - \quad)^2 + (x_3 + \quad)^2 =$

b) Geben Sie die Berührpunkte der Kugel mit den Würfelflächen an.

P_1(| |), P_2(| |), P_3(| |), P_4(| |), P_5(| |), P_6(| |)

c) Nun fällt paralleles Licht in Richtung $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ auf die Kugel. Geben Sie eine Vektorgleichung für den in der x_1x_2-Ebene entstehenden Schattenkreis an.

Mittelpunkt des Kreises: M(|), Radius des Kreises: r = . Kreis in Vektordarstellung: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}\right)^2 =$.